

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Е.А. Ефремова, А.С. Пасхалов, А.В. Гунин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебное пособие

Ростов-на-Дону
ДГТУ
2019

УДК 539.3(075.8)

Е92

Рецензент

кандидат технических наук, доцент *В.Н. Кротов*
(Ростовский государственный университет путей сообщения)

Ефремова, Елена Александровна.

Е92 Математическое моделирование предельных состояний
твердого тела : учеб. пособие / Е.А. Ефремова, А.С. Пасхалов,
А.В. Гунин ; Донской гос. техн. ун-т. – Ростов-на-Дону :
ДГТУ, 2019. – 88 с.

ISBN 978-5-7890-1659-6

Рассмотрены основные понятия и определения дисциплины «Математическое моделирование предельных состояний твердого тела». Представлены современные позиции наук о пластическом формоизменении твердых тел. Изложены основы теории предельного состояния, математического моделирования экспериментальных кривых предельных состояний твердого тела, теории напряженного состояния. Приведены модели твердых тел, кинематика сплошной среды, основы теории пластичности и теории прочности.

Предназначено для подготовки бакалавров направлений 15.03.01 Машиностроение, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, а также магистрантов направления 15.04.02 Технологические машины и оборудование.

УДК 539.3(075.8)

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Донского государственного технического университета

Научный редактор

кандидат технических наук, доцент Г.В. Чумаченко

© Ефремова Е.А., Пасхалов А.С.,
Гунин А.В., 2019

© Донской государственный
технический университет, 2019

ISBN 978-5-7890-1659-6

Введение

Разработка и совершенствование технологических процессов формоизменения материалов на базе теоретических исследований с использованием математических моделей является эффективным путем развития производства. Расширенное применение математических моделей при анализе процессов определяется полнотой описания процесса и достоверностью информации о нем, используемой в качестве исходных данных. Для этого необходимо использование современных методик обработки данных, оптимизации характеристик материалов и изделий, а также параметров технологии и оборудования.

Моделирование процессов позволяет провести анализ того, как устроен исследуемый объект, основные его свойства, законы развития процесса и определить оптимальные способы управления процессом при заданных целях и критериях его исполнения.

Теория предельного состояния и теория хрупких трещин составляют основу современной механики разрушения. Это математически завершенные теории, на основе которых было решено много проблем большого практического значения. Эти теории дают идеализированное описание свойств вязкого и хрупкого разрушения (пластичности и хрупкости), которые в разной мере присущи всем твердым телам.

При действии внешних сил материал конструкции может находиться в различных механических состояниях. При невысоких уровнях напряжений материал пребывает в упругом состоянии. При значительных напряжениях в материале обнаруживаются заметные остаточные деформации, он переходит в пластическое состояние. Затем, при дальнейшем увеличении внешних сил, происходит образование местных трещин и наступает его разрушение.

Механическое состояние материала в точке зависит в первую очередь от напряженного состояния в ней. С целью определения прочности материалов вводится понятие «предельное

напряженное состояние». Для пластичного материала предельным обычно считается напряженное состояние, которое соответствует возникновению заметных остаточных деформаций, а для хрупкого – такое, при котором начинается разрушение материала.

Теория предельных состояний связана с изучением свойств материала. Она устанавливает зависимость между пределом текучести и напряжениями, возникающими в металле, при его пластической деформации. Эту теорию можно рассматривать как предельные случаи соответствующих теорий идеальной упруго-пластической среды, в уравнениях которых опускаются члены с упругой компонентой деформации.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Понятия материальной точки, абсолютно твердого тела, сплошной среды

Выделим в теле некоторый неограниченный объем пространства – A , состоящий из значительного числа частиц – C . Выделим в объеме пространства бесконечно малый объем dV , наделенный бесконечно малой массой dm . Этот объем называется *физической частицей* (рис. 1.1) [1, 2, 5, 6, 9, 14, 16, 17].

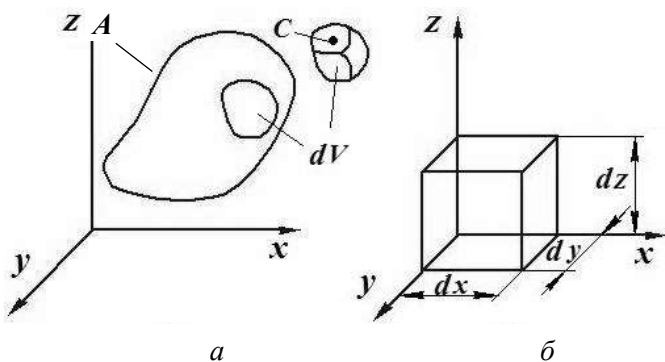


Рис. 1.1. Схемы:

a – неограниченного объема пространства A ;

$б$ – выделенной материальной точки C

Этот бесконечно малый объем материальной точки достаточно большой, для того чтобы в нем можно было выделить прямоугольный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz .

Бесконечно малый параллелепипед, размеры которого бесконечно малы, по сравнению с размерами рассматриваемой физической частицы, называется *материальной точкой*.

Если в состоянии покоя или равновесия свойства данной материальной точки совпадают со свойствами выделенного объема пространства A и свойствами физической частицы dV , то такое тело называется *абсолютно твердым однородным телом*.

Модель реального деформируемого тела, которая сохраняет основные его свойства, кроме атомарного строения, микро- и макроструктуры, называется *сплошной средой*.

1.2. Гипотезы сплошности, однородности и изотропии деформируемого материала

Гипотеза сплошности заключается в том, что сплошная среда состоит из неразрывной системы материальных точек, заполняющих некоторый объем пространства, связанных силами взаимодействия или подчиненных геометрическим связям.

Гипотеза однородности говорит о том, что все вводимые величины и понятия представляются как средние для всего выделенного объема, а сама сплошная среда представляется однородной сплошной средой.

Материал называется *изотропным*, если его свойства одинаковы во всех направлениях, если же свойства материала зависят от направления испытания, то такой материал называется *анизотропным*.

Механические свойства мелкозернистых изделий, несмотря на анизотропию свойств в отдельных зернах, примерно одинаковы в различных направлениях (статически усреднены), поэтому такие тела называются *квазиизотропными*. На основании этого в инженерной механике твердого тела и математическом моделировании предельных состояний твердого тела (при решении технологических задач) принимается гипотеза об изотропии деформируемого материала – «Материал на любом уровне размера элементарного объема обладает изотропными механическими свойствами».

1.3. Понятие силы, внешние и внутренние силы, напряжение

Сила – величина векторная. Сила считается полностью определенной, если задан ее модуль и соответствующий ей вектор. Силы являются мерой механического взаимодействия тел. Если конструкция рассматривается изолированно от окружающих тел, то действие последних на нее заменяется силами, которые называются *внешними*.

По способу приложения внешние силы делятся на объемные и поверхностные.

Объемные силы распределены по всему объему рассматриваемого тела и приложены к каждой его частице. К ним относятся собственный вес сооружения, магнитное притяжение или силы инерции. Единицей измерения объемных сил является сила, отнесенная к единице объема – кН/м^3 .

Поверхностные силы приложены к участкам поверхности – $P_1 \dots P_n$ и являются результатом непосредственного контактного взаимодействия рассматриваемого объекта с окружающими телами (рис. 1.2, а). В зависимости от соотношения площади приложения нагрузки и общей площади поверхности рассматриваемого тела, поверхностные силы подразделяются на сосредоточенные и распределенные.

Взаимодействие между частями рассматриваемого тела характеризуется внутренними силами. Величины внутренних сил определяются с применением метода сечений. Если рассечь тело мнимой плоскостью A , то силы реакции отброшенной части, которые удерживают в равновесии каждую часть в отдельности, называют **внутренними силами** P_A (рис. 1.2, б).

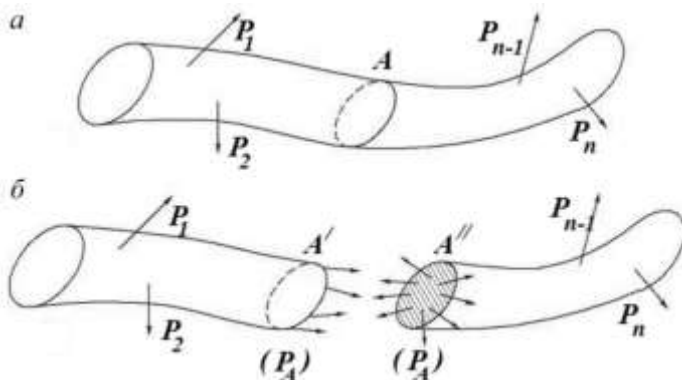


Рис. 1.2. Схемы распределения внешних и внутренних сил

Величина внутренней силы, отнесенная к единице площади, называется **интенсивностью внутренних сил или напряжением**.

Если площадка приложения внутренних сил мала по сравнению с размерами тела, то распределенную нагрузку \bar{q} можно заменить системой сил, ей статически эквивалентной – главным вектором силы \bar{P} (сосредоточенной силы) и главным моментом \bar{M} , что запишется в виде (**принцип Сен-Венана**):

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \iint_{\Delta F} \bar{q} \cdot dF, \\ \bar{M} &= \iint_{\Delta F} (\bar{r} \cdot \bar{q}) dF,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где r – радиус-вектор, приведенный из центра приведения сил на площадке ΔF до текущей силы \bar{q} .

Принцип напряжения Коши. Рассмотрим произвольную точку M на плоскости сечения и малую площадку ΔF около этой точки (рис. 1.3).

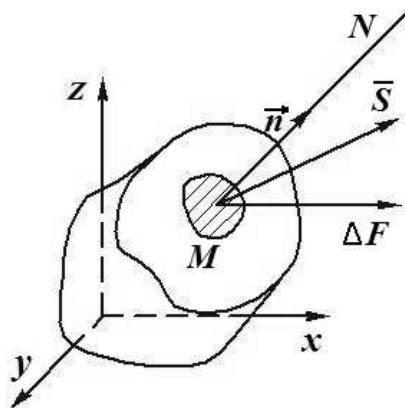


Рис. 1.3. Схема принципа напряжения Коши

Положение площадки определяется единичным вектором нормали \vec{n} . Силы, действующие на площадке, заменим главным вектором силы – \bar{P} и главным моментом – \bar{M} (принцип Сен-Венана). Если площадка $\Delta F \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta F} = \frac{d\bar{P}}{dF} = \bar{S}_n, \quad (1.2)$$

где \bar{S}_n – вектор напряжения,

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{M}}{\Delta F} = \frac{d\bar{M}}{dF} = \bar{M}_n, \quad (1.3)$$

где \bar{M}_n – вектор момента напряжений.

Индекс n говорит о том, что ориентация площадки ΔF задается единичным вектором нормали \vec{n} .

Через точку M деформируемого тела можно провести бесконечное множество сечений. В каждом таком сечении действует свой вектор напряжения \bar{S} . Следовательно, внутри тела действует бесконечное множество напряжений с различными направлениями. Тогда в точке M существует векторная функция \bar{S} от векторного аргумента \vec{n} :

$$\bar{S} = \bar{B}(\vec{r}, \vec{n}), \quad (1.4)$$

где \bar{S} – вектор напряжения в среде, который является функцией точки и ориентации площадки; \vec{r} – радиус-вектор точки; \vec{n} – орт нормали N к площадке.

Напряженное состояние в точке считается известным, если известно напряжение на любой площадке, проходящей через данную точку – *принцип напряжения Коши*.

1.4. Деформации, виды деформаций

Деформация – смещение частей или материальных частиц тела, при котором изменяются взаимные расстояния между ними, но не нарушается непрерывность самого тела.

Количественно деформацию можно оценить через абсолютную или через относительную деформацию.

Абсолютная деформация определяется соотношением:

$$\Delta L = L_{\partial} - L_0, \quad (1.5)$$

где L_{∂} – конечный размер тела; L_0 – начальный размер тела.

Относительную деформацию можно определить одним из следующих способов:

– по **показателю Коши**

$$\varepsilon = \frac{L_{\partial} - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}, \quad (1.6)$$

– по **показателю Генки**

$$\delta = \ln \frac{L_{\partial}}{L_0}. \quad (1.7)$$

Можно также выделить следующие виды деформаций.

Конечная деформация – деформация тела в целом, то есть перемещения точек тела, характеризующее полным вектором перемещения.

Малые деформации (или малые этапные деформации ε) – деформации материальных частиц, где материальная частица – прямоугольный параллелепипед с бесконечно малыми сторонами dx , dy и dz , параллельными координатным осям (см. рис. 1.1). Также деформация называется малой, если ее квадратами и произведениями можно пренебречь.

Относительная деформация тела может характеризоваться удлинениями линейных элементов ε и их поворотом относительно начального положения γ .

Также можно отметить следующие виды относительных линейных деформаций. Если при деформации длина ребра элементарного параллелепипеда увеличивается, то деформация положительна и называется **относительным удлинением**, если

уменьшается, то деформация отрицательная и называется *относительным укорочением*. Обозначаются такие деформации буквой ε (ε_x , ε_y , ε_z) и называются *относительной линейной деформацией*.

Относительные сдвиги характеризуются углом поворота линейного элемента, относительно своего начального положения. В результате этого первоначально прямоугольный параллелепипед превращается в косоугольный. Обозначаются сдвиги буквой γ (γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx}). Первый индекс в обозначении сдвига определяет начальное положение линейного элемента, второй – в сторону какой координатной оси произошёл поворот. Второе название относительного сдвига – *относительная угловая деформация*.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ КРИВЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Диаграмма растяжения материала

Основными механическими свойствами являются прочность, упругость, вязкость, твердость. Зная механические свойства, конструктор выбирает соответствующий материал, обеспечивающий надежность и долговечность конструкций при их минимальной массе. Механические свойства определяют поведение материала при деформации и разрушении от действия внешних нагрузок [2, 4, 6, 9, 10, 11, 13, 15–17].

В зависимости от условий нагружения механические свойства могут определяться при:

- статическом нагружении – нагрузка на образец возрастает медленно и плавно.

- динамическом нагружении – нагрузка возрастает с большой скоростью, имеет ударный характер.

- повторном, переменном или циклическом нагружении – нагрузка в процессе испытания многократно изменяется по величине или по величине и направлению.

Для получения сопоставимых результатов образцы и методика проведения механических испытаний регламентированы ГОСТами. При статическом испытании на растяжение по ГОСТ 1497-84 получают характеристики прочности и пластичности.

Прочность – способность материала сопротивляться деформациям и разрушению.

Пластичность – способность материала к пластической деформации, то есть способность получать остаточное изменение формы и размеров без нарушения сплошности.

Механические испытания для определения характеристик прочности и пластичности проводятся на специальных машинах, которые записывают диаграмму растяжения, выражающую зависимость действующей нагрузки P от удлинения образца Δl , то

есть $P = f(\Delta l)$ (рис. 2.1). Однако для получения данных по механическим свойствам эту зависимость перестраивают в зависимость напряжения σ от относительного удлинения Δl .

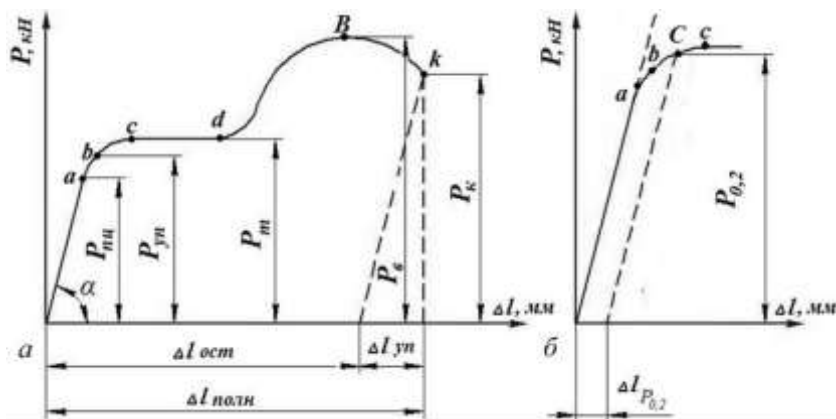


Рис. 2.1. Диаграмма растяжения:
 а – общий вид; б – участок диаграммы растяжения, определяющий условный предел текучести

2.2. Характеристики диаграммы напряжений

Проанализируем процессы, которые происходят в материале образца при увеличении нагрузки. Участок «*Оа*» на диаграмме соответствует упругой деформации материала, когда соблюдается закон Гука. Напряжение, соответствующее упругой предельной деформации в точке *а*, называется **пределом пропорциональности**.

Предел пропорциональности ($\sigma_{\text{пп}}$) – максимальное напряжение, до которого сохраняется линейная зависимость между деформацией и напряжением. Рассчитать его можно следующим образом:

$$\sigma_{\text{пп}} = \frac{P_{\text{пп}}}{F_0}, \quad (2.1)$$

где $P_{\text{пп}}$ – сила, соответствующая моменту окончания сохранения линейной зависимости между деформацией и напряжением; F_0 – начальная площадь образца.

При напряжениях выше предела пропорциональности происходит равномерная пластическая деформация (удлинение или сужение сечения). При этом каждому напряжению соответствует остаточное удлинение, которое получаем проведением из соответствующей точки диаграммы растяжения линии параллельной линии «0а», например, из точки «С» (см. рис. 2.1, б).

Так как практически невозможно установить точку перехода в неупругое состояние, то устанавливают **условный предел упругости** – максимальное напряжение, до которого образец получает только упругую деформацию. В этом случае считают напряжение, при котором остаточная деформация очень мала (0,005...0,05).

В обозначении условного предела упругости указывается значение остаточной деформации (0,05). Рассчитать его можно следующим образом:

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{P_{0,05}}{F_0}, \quad (2.2)$$

где $P_{0,05}$ – сила, соответствующая моменту, при котором остаточная деформация очень мала (0,005...0,05).

Предел текучести – характеризует сопротивление материала небольшим пластическим деформациям. В зависимости от природы материала используют физический или условный предел текучести.

Физический предел текучести (σ_T) – это напряжение, при котором происходит увеличение деформации при постоянной нагрузке (наличие горизонтальной площадки «cd» на диаграмме растяжения (рис. 2.1, а). Он используется для очень пластичных материалов и имеет вид:

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}, \quad (2.3)$$

где P_T – сила, соответствующая моменту, при котором происходит увеличение деформации при постоянной нагрузке.

Но основная часть металлов и сплавов не имеет площадки текучести. В этом случае определяется условный предел текучести. **Условный предел текучести** ($\sigma_{0,2}$) – это напряжение, вызывающее остаточную деформацию $\delta = 0,2$ %. Имеет вид:

$$\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F_0}, \quad (2.4)$$

где $P_{0,2}$ – сила, вызывающая остаточную деформацию $\delta = 0,2$ %.

Физический или условный предел текучести является важной расчетной характеристиками материала. Действующие в детали напряжения должны быть выше данного предела текучести.

Равномерная по всему объему пластичная деформация продолжается до значения предела прочности. В точке «**B**» в наиболее слабом месте начинает образовываться шейка – сильное местное утомление образца.

Предел прочности (σ_b) – напряжение, соответствующее максимальной нагрузке, которую выдерживает образец до разрушения (временное сопротивление разрыву):

$$\sigma_b = \frac{P_b}{F_0}, \quad (2.5)$$

где P_b – сила в момент начала образования шейки.

Образование шейки характерно для пластичных материалов, которые имеют диаграмму растяжения с максимумом. Предел прочности характеризует прочность как сопротивление значительной равномерной пластичной деформации. За точкой «**B**» вследствие развития шейки нагрузка падает, и в точке «**k**» происходит разрушение.

Истинное сопротивление разрушению – это максимальное напряжение, которое выдерживает материал в момент, предшествующий разрушению образца (рис. 2.2). Его можно определить по следующей формуле:

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F_k}, \quad S_k = \frac{P_k}{F_k}, \quad (2.6)$$

где P_k – сила, соответствующая моменту разрушения образца; F_k – конечная площадь поперечного сечения образца.

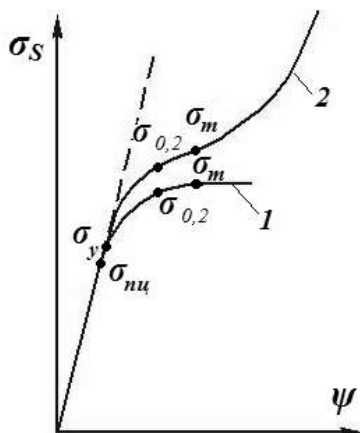


Рис. 2.2. Диаграмма напряжений:
1 – условных напряжений; 2 – истинных напряжений

Истинное сопротивление разрушению значительно больше предела прочности, так как оно определяется относительно конечной площади поперечного сечения образца. **Истинные напряжения** σ_s определяют как отношение нагрузки к площади поперечного сечения в данный момент времени:

$$\sigma_s = \frac{P_k}{F_k}, \quad (2.7)$$

где P_k – сила, соответствующая текущему моменту времени; F_k – площадь, соответствующая текущему моменту времени.

При испытании на растяжение определяются и характеристики пластичности. Это свойство твердых тел используют при обработке материалов давлением. Характеристиками пластичности являются:

– *относительное удлинение* (δ)

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100\% = \frac{\Delta l_{\text{ост}}}{l_0} \cdot 100\%, \quad (2.8)$$

где l_0 и l_k – начальная и конечная длина образца; $\Delta l_{\text{ост}}$ – абсолютное удлинение образца, определяется измерением образца после разрыва;

– *относительное сужение* (ψ)

$$\psi = \frac{F_0 - F_k}{F_0} \cdot 100\% , \quad (2.9)$$

где F_0 – начальная площадь поперечного сечения; F_k – площадь поперечного сечения в шейке после разрыва.

Относительное сужение более точно характеризует пластичность и служит технологической характеристикой при формоизменении твердых тел. Пластичные материалы более надежны в работе, так как для них меньше вероятность опасного хрупкого разрушения.

2.3. Идеализация механических свойств деформируемой среды

Для записи уравнений состояния необходимо идеализировать механические свойства деформируемой среды таким образом, чтобы учесть характерные и главные стороны поведения твердого тела в процессе деформации. В этом случае используют ряд реологических моделей идеальных сред, приведенных ниже.

Идеально упругая среда. Модель такой среды математически можно описать выражением:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x, \quad (2.10)$$

где σ_x – сопротивление металла пластическому деформированию при линейном напряженном состоянии; E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга); ε_x – относительная линейная деформация.

Идеально упругая среда характеризуется линейной зависимостью между σ_x и ε_x (рис 2.3). При этом процесс деформации является обратимым, диссипация энергии, то есть превращение механической работы в тепловую энергию и ее рассеивание, не происходит. Связь между σ_x и ε_x – подчинена закону Гука.

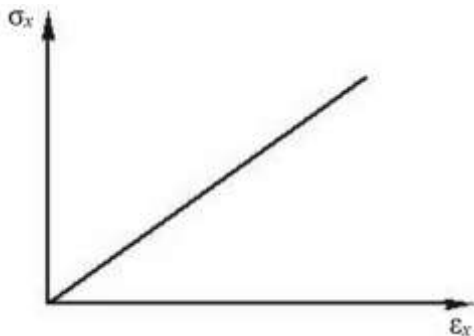


Рис. 2.3. Идеально упругая среда (среда Гука)

Идеальная жесткопластическая среда. Для модели такой среды в начальный момент отсутствует упругая деформация. Материал ведет себя, как абсолютно твердое не сжимаемое тело до тех пор, пока напряжения не достигнут значения физического предела текучести (σ_T) (рис. 2.4). Уравнение жесткопластической среды имеет вид:

$$\sigma_x = \sigma_T. \quad (2.11)$$

Следовательно, можно сказать, что сопротивление тела пластическому деформированию (σ_x) не зависит от деформации. Это возможно при больших пластических деформациях, когда упругими деформациями можно пренебречь.

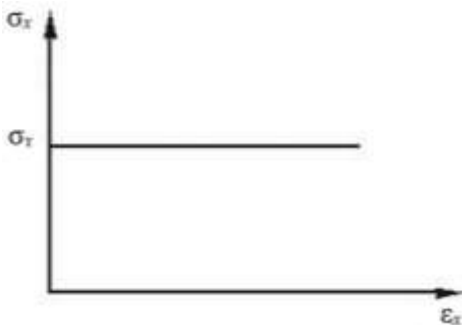


Рис. 2.4. Идеальная жесткопластическая среда

Идеальная упруго пластическая среда. Уравнение, описывающее идеальную упруго пластическую среду, может быть представлено в следующем виде:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x + \sigma_T. \quad (2.12)$$

В этом случае твердое тело (материал) деформируется необратимо при некотором неизменном значении напряжения σ_x , равном физическому пределу текучести (σ_T). Пластической деформации предшествует упругая деформация (по закону идеально упругой среды). Графически поведение такой среды представлено на рис. 2.5. При развитых пластических деформациях в этом случае можно пренебречь упругой составляющей деформации для металлов, которые имеют ярко выраженную площадку текучести.

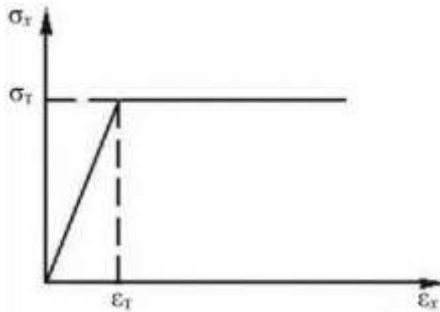


Рис. 2.5. Идеальная упруго пластическая среда

Несжимаемая упрочняющая среда. Необратимые деформации наступают только в тот момент, когда интенсивность нормальных напряжений (σ_i) или максимальные касательные напряжения (τ_{\max}) достигнет значения физического предела текучести (рис. 2.6). Для развития деформации необходимо, чтобы напряжение в процессе деформации постоянно увеличивалось. Уравнение для несжимаемой упрочняющейся среды выглядит следующим образом:

$$\sigma_x = \sigma_T + 3E_1 \cdot \varepsilon_x, \quad (2.13)$$

где $E_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}$ — модуль нелинейного упрочнения; $E'_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$ — модуль линейного упрочнения.

Зависимость этого напряжения от степени деформации, определяющаяся по формуле (2.13), называется условием упрочнения. В частном случае, для линейно упрочняющейся среды, в уравнение (2.13) вместо E_1 нужно подставлять E_1' (модуль линейного упрочнения) (рис. 2.6).

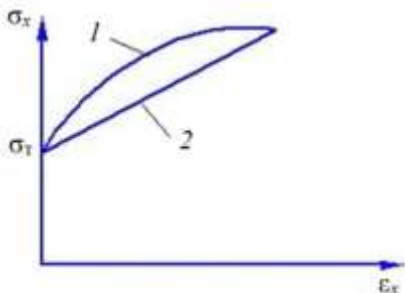


Рис. 2.6. Несжимаемая упрочняющая среда:

1 – нелинейно упрочняющаяся среда;

2 – линейно упрочняющаяся среда

Идеально вязкая среда. В данном случае тело деформируется при любом значении напряжения (рис. 2.7). Деформация необратима, не сопровождается изменением объема. Уравнение, описывающее такую среду, следующее:

$$\sigma_x = \mu' \cdot \dot{\epsilon}_x, \quad (2.14)$$

где μ' – коэффициент вязкости среды; $\dot{\epsilon}_x$ – скорость деформации.

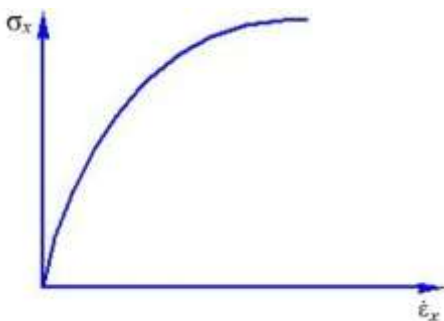


Рис. 2.7. Идеально вязкая среда

Диаграмма идеально вязкой среды, в отличие от всех предыдущих, строится в координатах: напряжение (σ_x), скорость деформации $\dot{\epsilon}_x$.

2.4. Уравнения и реологические модели сложных сред

Свойства сложных сред, приведенных ниже, изображаются многоэлементными реологическими моделями, которые состоят из простых элементов, описывающих те или иные свойства сред при помощи простейших механических аналогов.

Идеально упругая среда (среда Гука). Такая среда изображается в виде пружины, которая обладает определенным модулем растяжения K (рис. 2.8).

При приложении нагрузки пружина изменяет длину на величину δ_y , пропорциональную величине действия усилия P :

$$\delta_y = K_1 \cdot P, \quad (2.15)$$

где $K_1 = \frac{1}{E}$ – коэффициент пропорциональности; δ_y – относительное удлинение.



Рис. 2.8. Идеально упругая среда (среда Гука)

Относительную линейную деформацию данной пружины можно определить так:

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \sigma_y, \quad (2.16)$$

где ϵ_y – относительная линейная деформация; σ_y – напряжение при линейном растяжении.

Среда, обладающая вязкими свойствами (среда Ньютона).
 Данная среда изображается в виде сосуда, заполненного вязкой жидкостью, в которой перемещается поршень (рис. 2.9).

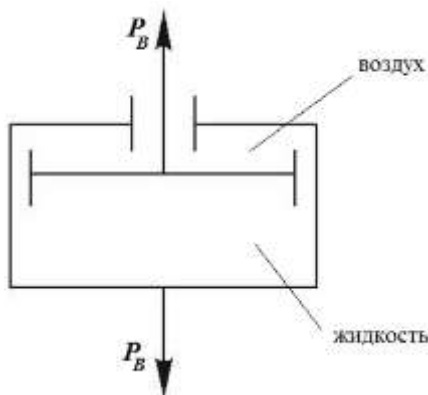


Рис. 2.9. Среда, обладающая вязкими свойствами (среда Ньютона)

Жидкость вытекает через зазор между цилиндром и поршнем. Уравнение для определения скорости перемещения поршня относительно цилиндра можно записать в виде:

$$\frac{\partial \delta_{\text{в}}}{\partial t} = K_2 \cdot P_B, \quad (2.17)$$

где $K_2 = \frac{1}{3\mu'}$ – коэффициент пропорциональности.

Уравнение (2.17) можно записать также в виде:

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{1}{3\mu'} \sigma_x, \quad (2.18)$$

где $\dot{\epsilon}_x$ – скорость деформации;

или следующим образом:

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} = \frac{1}{3\mu'} \sigma_x. \quad (2.19)$$

Формулы (2.17), (2.18) и (2.19) являются математическими аналогами.

Упруговязкая среда (среда Максвелла). Если соединить упругий и вязкий элемент последовательно, то изменения расстояния δ между точками приложения сил P можно определить по формуле (рис. 2.10):

$$\delta = \delta_y + \delta_v, \quad (2.20)$$

где δ_y – удлинение пружины; δ_v – перемещение поршня относительно цилиндра.

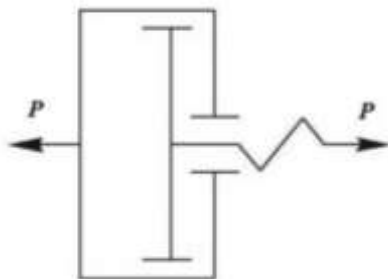


Рис. 2.10. Упруговязкая среда (среда Максвелла)

Полученное уравнение (2.20) продифференцируем по времени:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta_y}{dt} + \frac{d\delta_v}{dt}. \quad (2.21)$$

В уравнение (2.21) вместо δ_y подставим его значение из уравнения (2.15), а вместо $\frac{d\delta_v}{dt}$ подставим его значение из уравнения (2.17), вследствие чего получим:

$$\frac{d\delta}{dt} = K_1 \cdot \frac{dP_y}{dt} + K_2 \cdot P_v, \quad (2.22)$$

Далее выразим уравнение (2.22) следующим образом:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}, \quad \frac{dP_y}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}, \quad P = \sigma, \\ K_1 = K_y = \frac{1}{E}, \quad K_2 = K_v = \frac{1}{\mu}.$$

Тогда получим уравнение тела Максвелла для упруговязкой среды:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\mu'} \sigma. \quad (2.23)$$

Данная упруговязкая среда свойственна смолистым материалам, которые проявляют мгновенную упругость. Однако при небольших напряжениях они деформируются (текут) подобно вязким жидкостям.

Твердовязкая среда (среда Кельвина – Фойгта). Соединим упругий и вязкий элемент, параллельно получим твердовязкую среду (среда Кельвина – Фойгта). Она используется для изучения затухания волн в земной коре и является моделью упругого материала с ячеистой структурой, наполненного вязкой жидкостью (пробка, резина) (рис. 2.11).

Определим суммарную силу, действующую в этом случае (рис. 2.11):

$$P = P_y + P_B. \quad (2.24)$$

Подставив их значения из уравнений (2.15) и (2.17), получим:

$$P = \frac{\delta_y}{K_1} + \frac{1}{K_2} \cdot \frac{d\delta_B}{dt}. \quad (2.25)$$

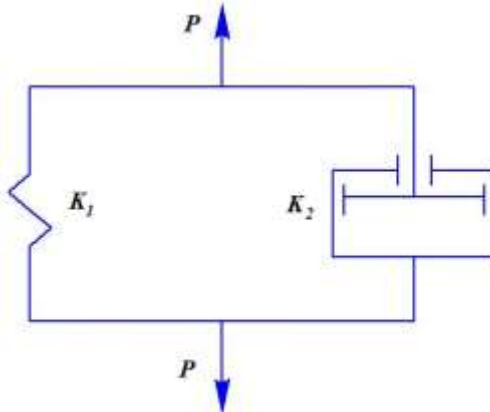


Рис. 2.11. Твердовязкая среда (среда Кельвина – Фойгта)

Перепишем уравнение (2.25), раскрыв коэффициенты K_1 , K_2 и выразив P и δ через σ , ε , получим:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \mu' \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (2.26)$$

Данное уравнение называется уравнением тела Кельвина – Фойгта.

2.5. Аппроксимация экспериментальных кривых

Аппроксимация – это процесс подбора экспериментальных функций $f(x)$ для установления из опыта (эксперимента) функциональной зависимости $y = f(x)$.

Функция $f(x)$ – это оптимальное уравнение, которое наилучшим образом описывает поведение исследуемого объекта.

Типы аппроксимаций данных. Аппроксимация может быть:

- линейная;
- логарифмическая;
- полиномиальная;
- степенная;
- экспоненциальная;
- линейная фильтрация и т.д.

В электронных таблицах Excel используется шесть различных видов линий тренда (аппроксимирующих кривых):

1. Линейная аппроксимация – это прямая линия, наилучшим образом описывающая набор данных (рис. 2.12, а). Уравнение прямой:

$$y = ax + b, \quad (2.27)$$

где a – тангенс угла наклона; b – точка пересечения прямой с осью Y .

2. Логарифмическая аппроксимация хорошо описывает как положительные, так и отрицательные величины, которые вначале быстро растут или убывают, а затем постепенно стабилизируются (рис. 2.12, б). Уравнение данной кривой:

$$y = c \ln(x) + b, \quad (2.28)$$

где a и b – константы.

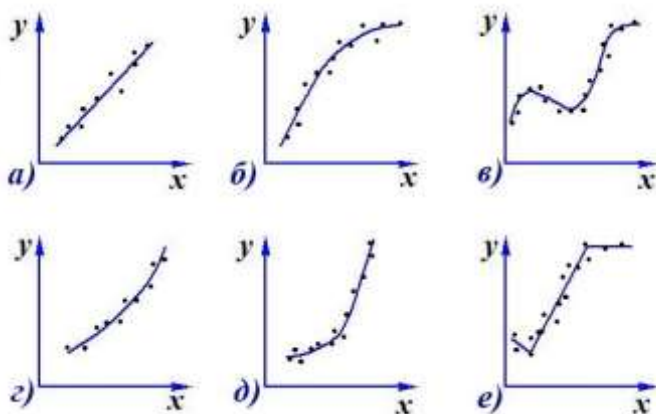


Рис. 2.12. Конфигурация видов линий тренда в электронных таблицах Excel:

а – линейная; *б* – логарифмическая; *в* – полиномиальная; *г* – степенная; *д* – экспоненциальная; *е* – линейная фильтрация

3. Полиномиальная аппроксимация используется для величин, попеременно возрастающих и убывающих (рис. 2.12, *в*). Степень полинома определяется количеством экстремумов (максимальные и минимальные значения). Полином второй степени описывает один максимум и один минимум, полином третьей степени описывает один или два максимума или минимума и т.д. Уравнение данной кривой:

$$y = a + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \quad (2.29)$$

4. Степенная аппроксимация дает хорошие результаты, если зависимость, которая содержится в экспериментальных данных, характеризуется постоянной скоростью роста, например, ускорение автомобиля (рис. 2.12, *г*). Если есть нулевые или отрицательные значения, то данная аппроксимация не используется. Уравнение данной кривой:

$$y = ax^n. \quad (2.30)$$

5. Экспоненциальная аппроксимация применяется в том случае, когда скорость изменения данных непрерывно возрастает (рис. 2.12, д). Для данных, имеющих нулевые или отрицательные значения, этот способ аппроксимации не применим. Уравнение данной кривой:

$$y = ae^{bx}. \quad (2.31)$$

6. Линейная фильтрация или скользящее среднее позволяет сгладить колебания данных и более наглядно показать характер зависимости.

Аппроксимация кривых упрочнения. Для описания приближенных зависимостей, учитывающих влияние упрочнения, используют различные типы аппроксимирующих кривых. В качестве прямой, характеризующей изменение σ_5 в зависимости от ε , принимают касательную, проведенную кривой упрочнения в точке, соответствующей окончанию этапа удлинения и начала образования шейки.

Реальные диаграммы деформирования в целях их упрощения схематизируют и описывают с помощью аналитических формул. Описание диаграммы деформирования степенной зависимостью строится в координатах $\sigma_i - \varepsilon_i$. Наиболее часто диаграмму $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ аппроксимируют единой кривой. Наиболее часто в этом случае используется *степенная зависимость Бильфингера*, которая имеет вид:

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^k, \quad (2.32)$$

где A – константа, имеющая размерность напряжения; k – показатель степени.

Для большинства материалов показатель степени k изменяется в следующих пределах: $0 \leq k \leq 1$. При $k = 1$ (рис. 2.13, б) уравнение (2.32) представляет закон Гука ($A = E$), а при $k = 0$ (см. рис. 2.13, в) – закон жесткопластического тела ($A = \sigma_T$). Это означает, что из решения, найденного для конструкции из материала с произвольным значением k , можно автоматически получить (сделав определенные подстановки) решение для линейно-упругой и жесткопластической конструкции.

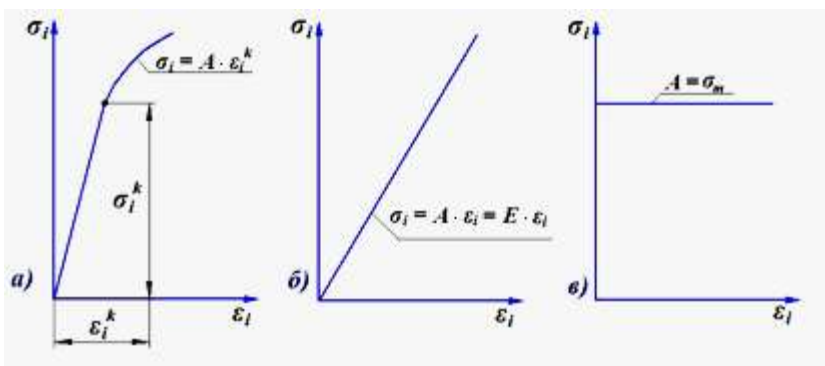


Рис. 2.13. Степенной закон Бильфингера:
 $a - 0 \leq k \leq 1$; $b - k = 1$ и $A = E$; $c - k = 0$ и $A = \sigma_T$

При пластической деформации показателя степени $k > 1$, получаем диаграмму, которая приближенно описывает кривую упрочнения (см. рис. 2.13, *a*). Ввиду своей простоты и хорошего соответствия опытным данным для широкого круга материалов степенная зависимость является наиболее приемлемой для описания нелинейного (пластического) деформирования.

В целях расширения диапазона действия степенного закона его применяют иногда в комбинированном виде, используя комбинацию линейной и степенной зависимостей:

$$\sigma_i = A_1 \epsilon_i \pm A_2 \epsilon_i^k. \quad (2.33)$$

Иногда полагают, что $k = 2$ (*зависимость Ф.И. Герстнера*). Первую константу в уравнении (2.33) определяют из условия $A_1 = E$ таким образом, чтобы при малых деформациях из уравнения (2.33) получался закон Гука. Для определения второй константы A_2 необходимо иметь совпадение пределов прочности экспериментальной и аппроксимирующей кривых.

Дробно-линейная (гиперболическая) зависимость была предложена С.П. Тимошенко (рис. 2.14, *a*):

$$\sigma_i = \frac{\epsilon_i}{a + b \epsilon_i}, \quad (2.34)$$

где a и b – эмпирические коэффициенты.

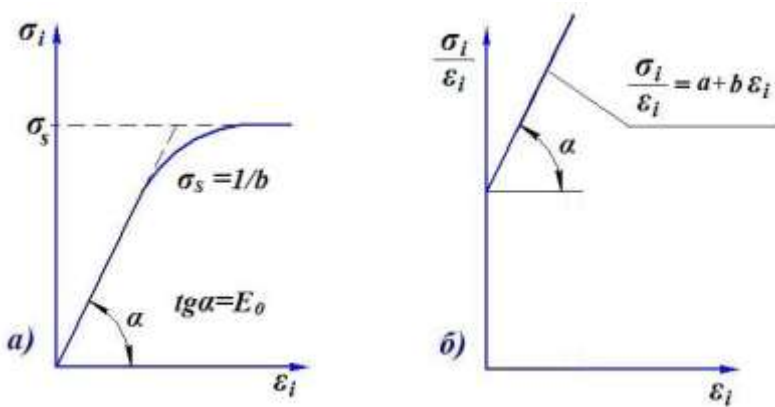


Рис. 2.14. Дробно-линейная зависимость:

a – в осях σ_i - ε_i ; \bar{b} – в осях $\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$ - ε_i

Для определения геометрического смысла коэффициентов a и b гиперболическую зависимость (2.34) строят в осях $\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$ - ε_i (см. рис 2.14, б).

Из данной зависимости определяют:

$$a = \frac{1}{E_0}, \quad b = \frac{1}{\sigma_s},$$

где E_0 – начальный модуль, соответствующий бесконечно малой деформации (модуль упругости); σ_s – предельное значение напряжения (предел текучести σ_T или предел прочности σ_B).

В 1960 г. В.В. Соколовский предложил следующую зависимость:

$$\sigma_i = \frac{s\varepsilon_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon_i}{t}\right)^2}}, \quad (2.35)$$

где s и t – коэффициенты, определяемые по опытной диаграмме.

Физический смысл опытных параметров этой кривой выражается в виде:

$$s = E_0,$$

$$t = \frac{\sigma_s}{E_0},$$

где E_0 – начальный модуль, соответствующий бесконечно малой деформации; σ_s – предельное значение напряжения, которое соответствует пределу текучести или пределу прочности при сжатии.

2.6. Эффект Боушингера и петля упругого гистерезиса

Под эффектом Боушингера понимается уменьшение сопротивления знакопеременным пластическим деформациям, то есть уменьшение следующих характеристик пластичности материала: $\sigma_{ш}$, σ_y и σ_T при изменении направления действия нагрузки (рис. 2.15).

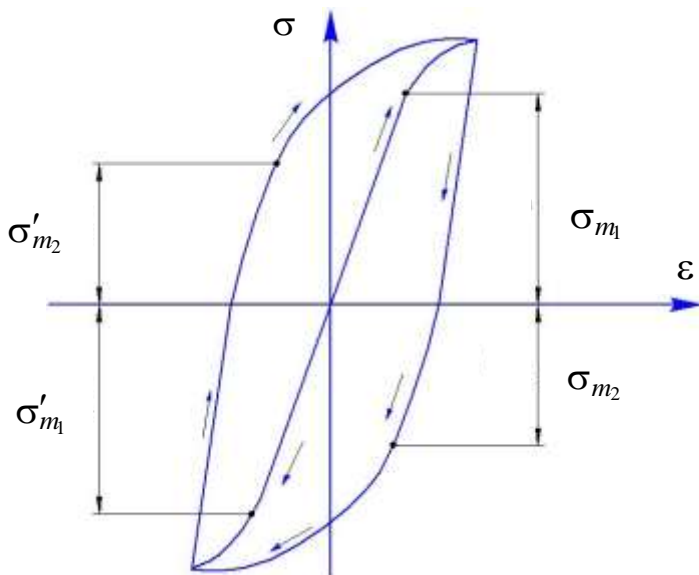


Рис. 2.15. Эффект Боушингера

Первичное пластическое деформирование материала снижает его сопротивление пластическому деформированию при повторной нагрузке, то есть $\sigma_{t1} > \sigma_{t2}$ имеющей направление, противоположное первичному – эффект Боушингера. Это объясняется тем, что при малой пластической деформации растяжения, зерна или деформируются упруго и пластически, или растягиваются и сжимаются.

При последующем сжатии в первую очередь пластические деформации возникают в ранее сжатых зернах, что приводит к понижению σ_{t2} . Аналогичные результаты получены при испытаниях на кручение в противоположных направлениях. Эффект Боушингера наблюдается во всех случаях изменения знака напряжения (реверс) нагрузки.

При растяжении образцов из мягкой стали, в том случае, когда интенсивность напряжений (σ_i) превышает сопротивление материала пластическому деформированию (σ_s), после полной разгрузки и последующем растяжении новый предел текучести (σ_t) становится больше первоначального, а новый предел упругости (σ_y) становится меньше первоначального, но затем он восстанавливается до первоначального значения.

При разгрузке и повторном растяжении на диаграмме образуется петля гистерезиса. Если образец, растянутый за предел текучести, впоследствии сжать, то пластическая деформация в этом случае появится при меньшем значении интенсивности напряжений (σ_i), чем при первичном растяжении, а предел упругости (σ_y) в этом случае впоследствии уменьшается необратимо.

Если при испытаниях на растяжение разгрузить образец за пределом текучести, а затем нагрузить, то на диаграмме образуется кривая $CC'N$ петля упругого гистерезиса (рис. 2.16).

Кривая разгрузки CC' и повторного нагружения $C'N$ почти параллельна первоначальной линии упругого нагружения OF . Практически это остаточная деформация ϵ_r после разгрузки. До точки N линию нового нагружения можно считать прямой.

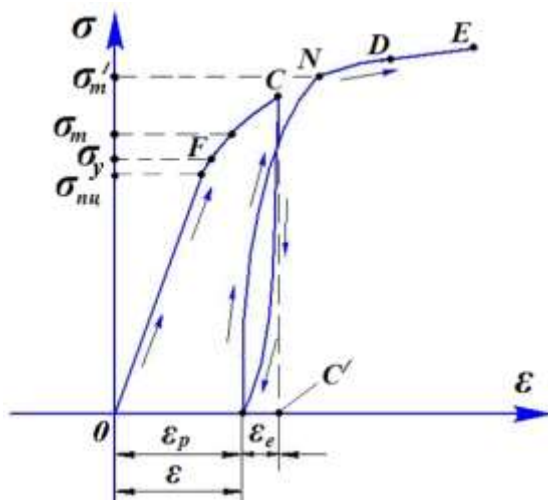


Рис. 2.16. Петля упругого гистерезиса

При повторном нагружении (когда $\sigma'_T > \sigma_{02}$) кривая **DE** является продолжением линии **OC**. Увеличение σ_T до нового значения местного предела текучести (σ'_T) можно объяснить упрочнением материала (наклепом).

Площадь петли упругого гистерезиса пропорциональна величине диссипации энергии, то есть той части механической энергии, которая рассеивается в виде теплоты цикла «разгрузка – нагрузка».

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

3.1. Компоненты напряжений на гранях элементарного параллелепипеда

Напряженным состоянием тела в точке называют совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам (сечениям), содержащим данную точку [1, 2, 4–7, 9, 11, 16, 17].

Исследование напряженного состояния дает возможность анализировать прочность материала для любого случая нагружения тела.

Пусть в окрестности исследуемой точки шестью попарно параллельными плоскостями выделен элементарный прямоугольный параллелепипед с размерами ребер dx , dy и dz (рис. 3.1). По его граням будут действовать нормальные σ_i и касательные τ_{ij} напряжения.

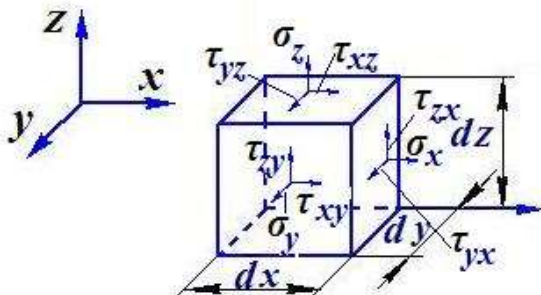


Рис. 3.1. Компоненты напряжений
в декартовой системе координат

Обозначения нормальных напряжений содержат один индекс – наименование оси, которой параллельно данное напряжение. В обозначении касательных напряжений используются два индекса: первый совпадает с индексом нормального напряжения, действующего по данной площадке, а второй – наименование оси, которой параллельно данное касательное напряжение.

Компоненты напряжений считаются положительными, если на площадке, внешняя нормаль к которой совпадает с положительным направлением оси координат, эти компоненты также направлены в сторону положительных осей координат.

Если внешняя нормаль к рассматриваемой площадке соответствует отрицательному направлению оси координат, тогда все положительные компоненты тензора напряжений должны быть направлены на этой площадке в стороны отрицательных направлений осей координат.

3.2. Закон парности касательных напряжений

Закон парности касательных напряжений устанавливает зависимость между величинами и направлениями пар касательных напряжений, действующих по взаимно перпендикулярным площадкам элементарного параллелепипеда.

Рассмотрим элементарный параллелепипед размеров dx , dy , dz (рис. 3.2). Запишем уравнение равновесия параллелепипеда в виде суммы моментов относительно оси Y , проходящей через точку P , получим:

$$\begin{aligned} & (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz) dx dy \frac{dz}{2} + \tau_{xy} dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{xz} dy dz \frac{dx}{2} - \\ & - (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx) dy dz \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

или

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (3.2)$$

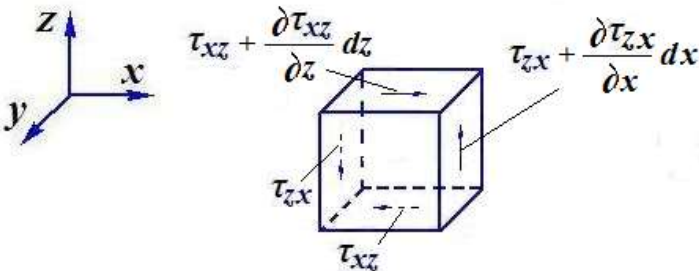


Рис. 3.2. Закон парности касательных напряжений

Аналогично, рассмотрев суммы моментов сил относительно осей X и Z , можно получить:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad (3.3)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (3.4)$$

Это и есть закон парности касательных напряжений. **Касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку.** Записать его можно следующим образом:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (3.5)$$

3.3. Главные площадки и главные напряжения

Рассмотрим две взаимно перпендикулярные площадки с касательными напряжениями τ_{xy} и τ_{yx} . Согласно закону парности касательных напряжений, знаки τ_{xy} и τ_{yx} противоположны. Поэтому если площадку с напряжением τ_{xy} поворачивать до совпадения с площадкой с напряжением τ_{yx} , то обязательно найдется такое положение площадки, когда касательные напряжения обратятся в ноль.

Площадки, по которым касательные напряжения равны нулю, называются главными, а действующие по этим площадкам нормальные напряжения – главными напряжениями.

Элемент, выделенный главными площадками, изображен на рис. 3.3.

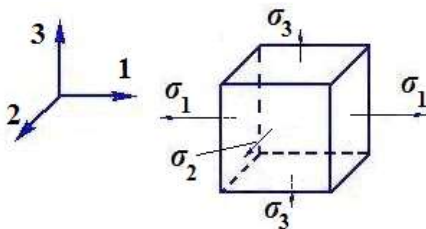


Рис. 3.3. Главные нормальные напряжения в декартовой системе координат

Главные напряжения обозначаются σ_1 , σ_2 , σ_3 , причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

В зависимости от количества действующих главных напряжений различают три вида напряженных состояний: *линейное, плоское и объемное*.

3.4. Тензорные характеристики напряженного состояния

Тензор напряжений. Компоненты напряжений, действующие на площадках, параллельных координатным плоскостям, можно объединить в соответствующие векторы напряжений, действующие на этих площадях. Иначе говоря, векторы напряжений, действующие на площадках, параллельных координатным плоскостям, можно выразить через их декартовы компоненты координат:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{nx} &= \bar{\sigma}_x = \sigma_{xx}\bar{e}_x + \sigma_{xy}\bar{e}_y + \sigma_{xz}\bar{e}_z \\ \bar{\sigma}_{ny} &= \bar{\sigma}_y = \sigma_{yx}\bar{e}_x + \sigma_{yy}\bar{e}_y + \sigma_{yz}\bar{e}_z \\ \bar{\sigma}_{nz} &= \bar{\sigma}_z = \sigma_{zx}\bar{e}_x + \sigma_{zy}\bar{e}_y + \sigma_{zz}\bar{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

То есть имеем три векторные составляющие $(\bar{\sigma}_{nx}, \bar{\sigma}_{ny}, \bar{\sigma}_{nz})$ полного напряжения в точке, которую примем за начало координат. Эти векторы составляют тензор. В данном случае это тензор напряжений второго ранга.

При переходе к новым осям координат x', y', z' компоненты тензора напряжений $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ преобразуются подобно компонентам вектора по закону попарных косинусов, то есть можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{nx} &= \bar{\sigma}_x = \sigma_{xx}\alpha_{x'x} + \sigma_{xy}\alpha_{x'y} + \sigma_{xz}\alpha_{x'z} \\ \bar{\sigma}_{ny} &= \bar{\sigma}_y = \sigma_{yx}\alpha_{y'x} + \sigma_{yy}\alpha_{y'y} + \sigma_{yz}\alpha_{y'z} \\ \bar{\sigma}_{nz} &= \bar{\sigma}_z = \sigma_{zx}\alpha_{z'x} + \sigma_{zy}\alpha_{z'y} + \sigma_{zz}\alpha_{z'z} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Теперь для простоты можно вычислить только первую новую компоненту через составляющие старой компоненты. Подставим (3.6) в (3.7), получим уравнение:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{x'} &= (\sigma_{xx}\bar{e}_x + \sigma_{xy}\bar{e}_y + \sigma_{xz}\bar{e}_z)\alpha_{xx'} + (\sigma_{yx}\bar{e}_x + \sigma_{yy}\bar{e}_y + \\ &+ \sigma_{yz}\bar{e}_z)\alpha_{yx'} + (\sigma_{zx}\bar{e}_x + \sigma_{zy}\bar{e}_y + \sigma_{zz}\bar{e}_z)\alpha_{yz}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Теперь вычислим проекцию нового вектора $\bar{\sigma}_{x'}$ на новую ось x' : умножим вектор на орт этой оси, то есть:

$$\sigma_{x'x'} = \bar{\sigma}_{x'} \cdot \bar{e}_{x'}. \quad (3.9)$$

Поэтому слева в выражении (3.7) будет $\bar{\sigma}_{x'} \cdot \bar{e}_{x'} = \sigma_{x'x'}$, а равенство примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} = & (\sigma_{xx}\bar{e}_x + \sigma_{xy}\bar{e}_y + \sigma_{xz}\bar{e}_z) \cdot \alpha_{xx'}\bar{e}_{x'} + \\ & + (\sigma_{yx}\bar{e}_x + \sigma_{yy}\bar{e}_y + \sigma_{yz}\bar{e}_z) \cdot \alpha_{yx'}\bar{e}_{x'} + \\ & + (\sigma_{zx}\bar{e}_x + \sigma_{zy}\bar{e}_y + \sigma_{zz}\bar{e}_z) \cdot \alpha_{zx'}\bar{e}_{x'}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если рассмотреть скалярные произведения единичных векторов, то видно, что:

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_x \times \bar{e}_{x'} &= a_{xx'} \\ \bar{e}_y \times \bar{e}_{x'} &= a_{yx'} \\ \bar{e}_z \times \bar{e}_{x'} &= a_{zx'} \end{aligned} \right\}$$

где $a_{xx'}$, $a_{yx'}$, $a_{zx'}$ – косинусы углов между соответствующими векторами.

Подставляя уравнение (3.10) в выражение (3.9) для составляющей, действующей по оси x' , напряжения на площадке с нормалью N параллельной оси x' , получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} = & \sigma_{xx}a_{xx'}a_{xx'} + \sigma_{xy}a_{xx'}a_{yx'} + \\ & + \sigma_{xz}a_{xx'}a_{zx'} + \sigma_{yx}a_{yx'}a_{xx'} + \sigma_{yy}a_{yx'}a_{yx'} + \\ & + \sigma_{yz}a_{yx'}a_{zx'} + \sigma_{zx}a_{zx'}a_{xx'} + \sigma_{zy}a_{zx'}a_{yx'} + \sigma_{zz}a_{zx'}a_{zx'}. \end{aligned} \quad (3.10a)$$

Из формулы (3.10a) следует, что каждая из составляющих напряжения преобразуется при переходе к новым координатным осям по правилу попарных произведений косинусов.

Итак, напряжение в точке определяется девятью величинами, которые связаны с координатами системой уравнений (3.7), и при переходе к другой координатной системе они преобразуются по правилу попарных произведений косинусов (формула 3.10a).

Это означает, что напряжение в данной точке сплошной среды определяется тензором второго ранга:

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

в индексных обозначениях это выглядит кратко:

$$T_{\sigma} = \sigma_{ij}. \quad (3.11a)$$

Учитывая закон парности касательных напряжений (3.5), можно сделать вывод о том, что тензор напряжений симметричен и независимых компонент в нем шесть. Симметричный тензор напряжений может быть рассмотрен в главных осях, когда $\tau_{xy} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$. Тогда:

$$T_{\sigma}^{\Gamma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

Аналогично понятию шарового тензора вводится понятие шарового тензора напряжений, для которого, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$:

$$T_{\sigma}^{\text{III}} = \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

Шаровой тензор напряжений характеризует равномерное всестороннее сжатие тела, приводящее к обратимому изменению объема. То есть шаровой тензор напряжений характеризует тело, находящееся *в упругом состоянии*.

Тензор напряжений можно разложить на шаровой тензор и *девиатор*:

$$D_{\sigma} = T_{\sigma} - T_{\sigma}^{\text{III}} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

Тензор напряжений имеет три инварианта – три величины, не зависящие от осей координат. В главных осях эти инварианты имеют вид:

– *линейный инвариант*

$$I_1(T_{\sigma}) = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3, \quad (3.15)$$

– квадратичный вариант

$$I_2(T_\sigma) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1, \quad (3.16)$$

– кубический инвариант

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3. \quad (3.17)$$

Величина, равная

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (3.18)$$

называется – **средним (или гидростатическим) давлением (напряжением) в точке.**

Неотрицательная величина:

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \quad (3.19)$$

называется **интенсивностью касательных напряжений.**

В теории обработки металлов давлением чаще рассматривают величину:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \cdot T = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}, \quad (3.20)$$

которая называется **интенсивностью напряжений**, а в теории пластичности – **приведенным напряжением.**

Таким образом, **напряженное состояние в точке** – это физическая величина, для количественной характеристики которой необходимо и достаточно задать девять чисел – компонент напряжения в координатных площадках, которые в совокупности образуют **тензор напряжений второго ранга.**

Если заданы эти девять величин, из которых независимых – шесть, то можно определить напряжение на любой наклонной площадке, проходящей через заданную точку.

3.5. Напряжения в наклонной площадке

Пусть N – это нормаль к площадке ABC – наклонной грани тетраэдра (рис. 3.4). Две грани его вертикальные – AOB и BOC , одна горизонтальная – AOC .

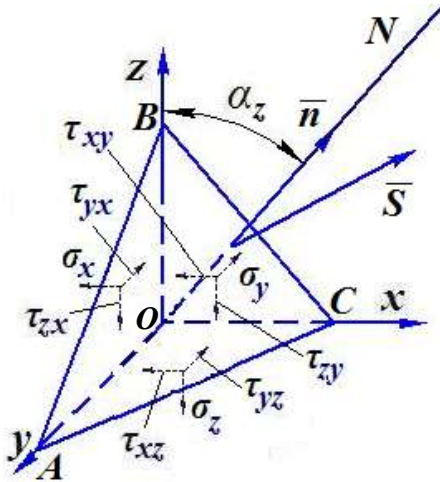


Рис. 3.4. Схема действия напряжений на наклонную площадку

Положение наклонной грани тетраэдра **ABC** определяется заданием углов, которые образуют нормаль к площадке с осями координат, и направляющими косинусами:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_x &= \cos(N, x) = a_x, \\ \cos \alpha_y &= \cos(N, y) = a_y, \\ \cos \alpha_z &= \cos(N, z) = a_z.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Если обозначить площадь наклонной грани тетраэдра **ABC** через ΔF , то площади ее проекций на координатные плоскости будут такими:

$$\begin{aligned}- \text{грань } \mathbf{COB}: \quad & \Delta F_x = \Delta F \cos(N, x) = \Delta F a_x, \\ - \text{грань } \mathbf{AOB}: \quad & \Delta F_y = \Delta F \cos(N, y) = \Delta F a_y, \\ - \text{грань } \mathbf{AOC}: \quad & \Delta F_z = \Delta F \cos(N, z) = \Delta F a_z.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Данный тетраэдр должен находиться в равновесии под действием всех сил, действующих на его грани. На наклонной грани действует полное напряжение S , имеющее проекции на координатные оси S_x, S_y, S_z . На гранях, которые совпадают с координатными плоскостями, действуют нормальные и касательные напряжения.

Условия равновесия тетраэдра в этом случае можно записать, спроектировав все действующие по его граням силы на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} \sum \Pi_{\rho x} &= S_x \Delta F - \sigma_x \Delta F_x - \tau_{yx} \Delta F_y - \tau_{zx} \Delta F_z = 0 \\ \sum \Pi_{\rho y} &= S_y \Delta F - \sigma_y \Delta F_y - \tau_{xy} \Delta F_x - \tau_{zy} \Delta F_z = 0 \\ \sum \Pi_{\rho z} &= S_z \Delta F - \sigma_z \Delta F_z - \tau_{xz} \Delta F_x - \tau_{yz} \Delta F_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Подставим в систему уравнений (3.23) значения ΔF_x , ΔF_y , ΔF_z из формул (3.22), после чего получим:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \sigma_x a_x + \tau_{yx} a_y + \tau_{zx} a_z \\ S_y &= \sigma_y a_y + \tau_{xy} a_x + \tau_{zy} a_z \\ S_z &= \sigma_z a_z + \tau_{xz} a_x + \tau_{yz} a_y \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Система уравнений (3.24) по физическому смыслу является отражением связи граничных напряжений S_i , действующих на площадке с нормалью, определенной вектором n_j , и внутренних напряжений компонент тензора σ_{ij} . В краткой форме записи она имеет вид:

$$\sigma_{ij} n_j = S_i. \quad (3.25)$$

Уравнения (3.24) известны как *граничные условия в напряжениях*. По составляющим этих уравнений легко определяется значение напряжения S на наклонной грани тетраэдра:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2. \quad (3.26)$$

Нормальное напряжение на наклонной площадке определяется как сумма проекций компонент S_x , S_y , S_z на нормаль к площадке:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= S_x a_x + S_y a_y + S_z a_z = \sigma_x a_x^2 + \sigma_y a_y^2 + \\ &+ \sigma_z a_z^2 + 2\tau_{xy} a_x a_y + 2\tau_{yz} a_y a_z + 2\tau_{xz} a_x a_z. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Полное касательное напряжение на наклонной площадке определяется по формуле:

$$\tau^2 = S^2 - \sigma^2. \quad (3.28)$$

Из приведенных в данном разделе формул следуют следующие выводы:

– если заданы компоненты тензора напряжений, действующие в точке по трем взаимно перпендикулярным площадкам, то напряженное состояние вполне определено;

– нормальное напряжение σ_n на наклонной грани, рассчитанное по формуле (3.27), по существу, вычисляется переходом от напряжений в произвольных координатных осях к местным осям с нормалью N . Этот переход осуществляется по правилу попарного произведения косинусов, как это принято для тензоров второго ранга.

3.6. Эллипсоид напряжений

Отложим по направлению нормали N к наклонной площадке вектор r , модуль которого определяется выражением (см. рис. 3.4):

$$r = \frac{A}{\sqrt{|\sigma_n|}}, \quad (3.29)$$

где A – некоторая произвольная постоянная; σ_n – нормальное напряжение, действующее на наклонной площадке, которое можно определить по формуле (3.27):

$$\sigma_n = \pm \frac{A^2}{r^2}. \quad (3.30)$$

Косинусы углов между радиусом-вектором r и координатными осями примут вид:

$$a_x = \frac{x}{r}; \quad a_y = \frac{y}{r}; \quad a_z = \frac{z}{r}, \quad (3.31)$$

где x, y, z – координаты конца вектора r .

Из формулы (3.30) имеем $A^2 = \sigma_n r^2$. Поэтому:

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sigma_x \frac{x^2}{r^2} + \sigma_y \frac{y^2}{r^2} + \sigma_z \frac{z^2}{r^2} + 2\tau_{xy} \frac{x \cdot y}{r} + 2\tau_{yz} \frac{y \cdot z}{r} + 2\tau_{xz} \frac{x \cdot z}{r} \right) \cdot r^2 = \\ &= \sigma_x \cdot x^2 + \sigma_y \cdot y^2 + \sigma_z \cdot z^2 + 2\tau_{xy} \cdot xy + 2\tau_{yz} \cdot yz + 2\tau_{xz} \cdot xz. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Полученное уравнение является поверхностью второго порядка, отнесенной к центру. Проанализируем возможные изменения напряжения S на наклонной площадке. Предположим при этом, что рассматриваются только такие оси, в которых касательные напряжения отсутствуют. Эти оси называются главными,

а напряжения, действующие на площадках, рассматриваемых в главных осях, – главные нормальные напряжения. Для этого случая формулы (3.24) примут вид:

$$S_1 = \sigma_1 a_1; S_2 = \sigma_2 a_2; S_3 = \sigma_3 a_3. \quad (3.33)$$

Из выражений (3.33) следует:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{S_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{S_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{S_z^2}{\sigma_3^2}. \quad (3.34)$$

Это уравнение описывает *трехосный эллипсоид* с полуосями $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ и является *эллипсоидом напряжений Ламэ* (рис. 3.5).

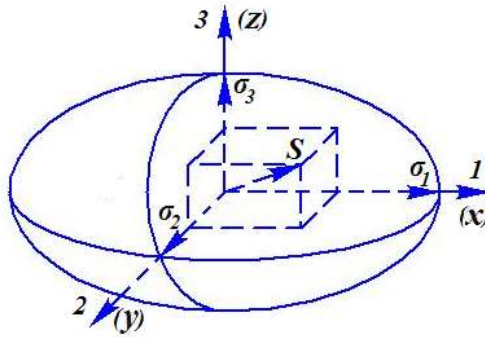


Рис. 3.5. Эллипсоид напряжений Ламэ

Итак, абсолютное значение вектора полного напряжения S на любой площадке, наклоненной к главным осям, не может быть меньше минимального главного напряжения σ_3 и больше максимального σ_1 .

3.7. Главные касательные напряжения

Пусть тензор напряжения задан в главных осях, тогда нормальное напряжение на наклонной площадке, как это следует из формулы (3.27), примет вид:

$$\sigma_n = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2. \quad (3.35)$$

Компоненты полного напряжения на этой наклонной площадке, как это следует из формул (3.24), примут вид:

$$S_1 = S_x = \sigma_1 a_1; \quad S_2 = S_y = \sigma_2 a_2; \quad S_3 = S_z = \sigma_3 a_3. \quad (3.36)$$

Полное напряжение на наклонной площадке будет равно:

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2. \quad (3.37)$$

Из формулы (3.28) и из самого смысла величины полного напряжения на наклонной площадке следует, что его можно разложить на нормальное и касательное напряжения. При этом касательное напряжение будет равно:

$$\tau^2 = S^2 - \sigma^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 - (\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2)^2. \quad (3.38)$$

Выясним, в каких площадках касательные напряжения принимают экстремальные значения.

Из условия:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad (3.39)$$

имеем:

$$a_3^2 = 1 - a_1^2 - a_2^2. \quad (3.40)$$

Подставив уравнение (3.40) в формулу (3.38), получим:

$$\begin{aligned} \tau^2 = & \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 (1 - a_1^2 - a_2^2) - \\ & - [\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 (1 - a_1^2 - a_2^2)]^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Продифференцируем выражение (3.41) по a_1 и приравняем частную производную нулю для нахождения экстремума. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\tau^2)}{\partial a_1} = & 2\sigma_1^2 a_1 - 2\sigma_3^2 - 2[\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 (1 - a_1^2 - a_2^2)] \times \\ & \times (2\sigma_1 a_1 - 2\sigma_3 a_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Сокращаем уравнение (3.42) на $2(\sigma_1 - \sigma_3)$ и выносим a_1 за скобки. Группируя члены, меняя знак, вынося за скобки a_1^2 и a_2^2 и разделив на 2, получим:

$$a_1 \left[(\sigma_1 - \sigma_3) a_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) a_2^2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right] = 0. \quad (3.43)$$

Выполняя аналогичные действия для $\frac{\partial(\tau^2)}{\partial a_2^2} = 0$, получим:

$$a_2 \left[(\sigma_1 - \sigma_3)a_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)a_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \right] = 0. \quad (3.44)$$

Решениями уравнений (3.43) и (3.44) являются:

$$a_1 = 0; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \pm 1. \quad (3.45)$$

Итак, получена первая группа направляющих косинусов углов наклона площадок, при которых достигается экстремум касательного напряжения σ .

Далее, приняв $a_1 = 0$ из уравнения (3.44), получим:

$$a_2 \left[(\sigma_2 - \sigma_3)a_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \right] = 0. \quad (3.46)$$

Решением данного уравнения является значение направляющего косинуса a_2 :

$$a_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Полученные значения направляющих косинусов a_1 и a_2 подставляем в уравнение (3.40). Получаем:

$$a_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Приняв $a_2 = 0$ и подставив в уравнение (3.43), получаем:

$$a_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Подставив a_1 и a_2 в уравнение (3.40), получим:

$$a_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, получены две группы направляющих косинусов, определяющих площадки, на которых касательные напряжения принимают экстремальные значения. Запишем их значения:

$$a_1 = 0; \quad a_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad a_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad (3.47)$$

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}. \quad (3.48)$$

Всего имеем шесть групп значений направляющих косинусов для наклонных площадок, на которых касательные напряжения τ получают экстремальные значения. Все они показаны в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Значения направляющих косинусов

Направляющие косинусы	Группы значений направляющих косинусов					
	$\tau = 0, \sigma = \max$			$\tau = \max$		
a_1	0	0	± 1	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
a_2	0	± 1	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0
a_3	± 1	0	0	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Первые три группы значений направляющих косинусов определяют координатные плоскости, в которых касательные напряжения отсутствуют. При анализе вопроса эти плоскости были приняты за главные. Следовательно, вторые три группы значений определяют плоскости, в которых касательные напряжения достигают максимальных (по абсолютной величине) значений, поскольку экстремум определялся для τ^2 .

Эти вторые три группы направляющих косинусов определяют плоскости, проходящие через одну координатную ось и делящие угол между двумя другими пополам. Всего получим три пары взаимно перпендикулярных площадок, в которых касательные напряжения достигают наибольших абсолютных значений (рис. 3.6).

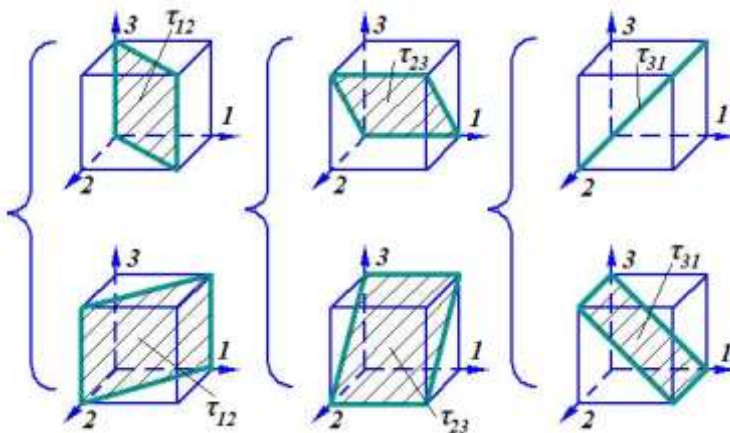


Рис. 3.6. Расположение в деформируемом теле площадок действия наибольших касательных напряжений

Подставляя значения полученных направляющих косинусов a_1, a_2, a_3 из табл. 3.1 для τ_{\max} в уравнение (3.38), получим значения главных касательных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{12} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2); & \left(a_1 &= \pm \sqrt{\frac{1}{2}}; a_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}; a_3 = 0 \right) \\ \tau_{23} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3); & \left(a_1 = 0; a_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}; a_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \\ \tau_{31} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1); & \left(a_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}; a_2 = 0; a_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

Индексы при τ означают, разности каких главных нормальных напряжений равны данным касательным напряжениям, и к каким осям плоскости действия этих касательных напряжения наклонены под углом 45° (см. рис. 3.6).

Таким образом, главные касательные напряжения равны полу-разности соответствующих главных нормальных напряжений. Наибольшее касательное напряжение равно полуразности наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Из системы уравнений (3.49) следует:

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0. \quad (3.50)$$

То есть знак наибольшего по абсолютной величине касательного напряжения противоположен знаку двух других.

Нормальные напряжения, действующие на площадках главных касательных напряжений, получим, подставив соответствующие значения a_1 , a_2 и a_3 в уравнение (3.35), получим:

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2); \quad \sigma_{23} = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3); \quad \sigma_{31} = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1). \quad (3.51)$$

3.8. Октаэдрические напряжения

Кроме главных нормальных напряжений и главных касательных напряжений, в теории напряженного состояния рассматриваются и так называемые *октаэдрические напряжения*, действующие на площадках, одинаково наклоненных к трем главным осям.

Углы наклона этих площадок находятся из уравнения:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1. \quad (3.52)$$

Полагая, что $a_1 = a_2 = a_3$, получим:

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (3.53)$$

Таких площадок четыре, с четырьмя им параллельными они образуют геометрическую фигуру – октаэдр (рис. 3.7).

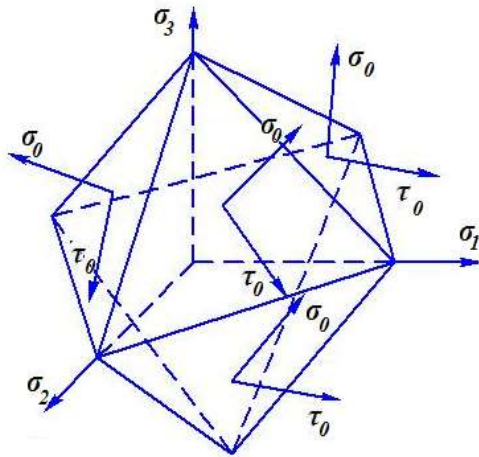


Рис. 3.7. Площадки действия октаэдрических напряжений

Определим напряжения, действующие на октаэдрических площадках. Из уравнения для компонентов напряжений на наклонных площадках (3.24) можно определить компоненты октаэдрических напряжений в главных осях. Они равны:

$$S_1 = \sigma_1 a_1; \quad S_1 = \sigma_1 a_1; \quad S_1 = \sigma_1 a_1 \quad (3.53)$$

Полное напряжение, действующее на октаэдрической площадке:

$$S_{\text{окт}}^2 = S_{1\text{окт}}^2 + S_{2\text{окт}}^2 + S_{3\text{окт}}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2). \quad (3.54)$$

Нормальная составляющая октаэдрического напряжения равна:

$$\sigma_{\text{окт}} = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.55)$$

Касательное октаэдрическое напряжение определим так:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{окт}}^2 &= S_{\text{окт}}^2 - S_{\text{норм}}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \left[\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{3}\sigma_1^2 + \frac{1}{3}\sigma_2^2 + \frac{1}{3}\sigma_3^2 - \frac{1}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3) = \\ &= \frac{1}{9}(2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3) = \\ &= \frac{1}{9}[(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + (\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2) + (\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2)]. \quad (3.56) \end{aligned}$$

Откуда, для касательного октаэдрического напряжения, имеем:

$$\tau_{\text{окт}} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (3.57)$$

Октаэдрические касательные напряжения мало отличаются от максимального касательного напряжения и изменяются в следующих пределах:

$$0,941 \approx \frac{2\sqrt{2}}{3} \geq \frac{\tau_{\text{окт}}}{\tau_{\text{max}}} \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816. \quad (3.58)$$

3.9. Дифференциальные уравнения движения и равновесия

В реальном теле при приложении внешней нагрузки напряжения изменяются при переходе от точки к точке.

Рассмотрим элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz . Выделим в нем две точки a и a_1 , принадлежащих противоположным граням (рис. 3.8).

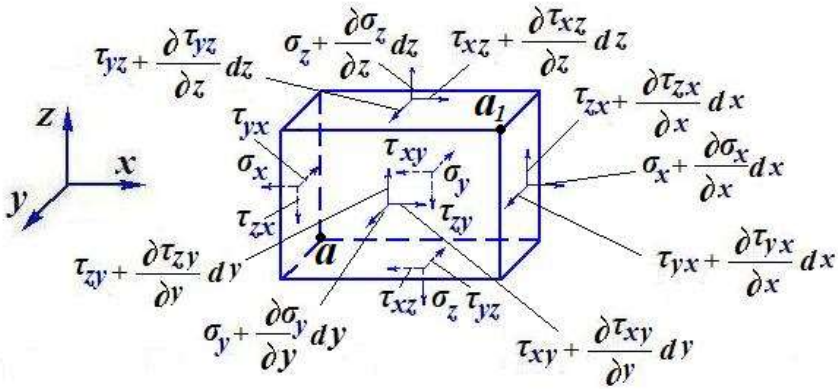


Рис. 3.8. Схема к определению уравнений движения и равновесия

Напряженное состояние в точке a_1 определяется тензором напряжений (формула (3.11)). Так как точка a_1 отстоит от точки a на расстоянии dx , dy , dz , то напряжения изменяются на величину приращения напряжения по соответствующей координате. Например, напряжение σ_x получит следующее приращение:

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx. \quad (3.59)$$

Тогда напряженное состояние в точке \mathbf{a}_1 определится следующим тензором напряжений:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) & (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy) & (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz) \\ (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx) & (\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy) & (\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz) \\ (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx) & (\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy) & (\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz) \end{vmatrix} \quad (3.60)$$

Выделенный параллелепипед находится в равновесии под действием напряжений на его гранях. Составим условия равновесия, взяв сумму проекций всех сил на оси координат, приравняем их к нулю. Тогда, например, проекции всех сил на ось x можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \\ & - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Раскрыв скобки и преобразовав полученное выражение, разделив все на dx, dy, dz , получим одно из уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0. \quad (3.62)$$

Спроецировав все силы на оси y и z , получим еще два аналогичных уравнения. Тогда условия равновесия для объемного напряженного состояния в виде дифференциальных уравнений в частных производных будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Для составления уравнений движения нужно учитывать дополнительно объемные силы, то есть силы, распределенные по объему тела, а также инерционные силы, определяемые вторым законом Ньютона. Каждая из проекций инерционной силы определяется как произведение массы на ускорение. Например, проекция по оси x будет равна:

$$F_x = ma_x = dxdydz \rho \frac{d^2 u_x}{dt^2}, \quad (3.64)$$

где m – масса рассматриваемого тела; $dxdydz$ – объем рассматриваемого тела (в плоскости xOy); ρ – плотность рассматриваемого тела.

С учетом всех сил, действующих на элементарный объем тела, составим уравнения движения аналогично уравнениям равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{dt^2} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{dt^2} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

4. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

4.1. Понятия о перемещениях и однородных деформациях

Деформацией называют изменение взаимного расположения точек тела под действием любых внешних воздействий (усилия, температуры, магнитных полей, радиации). В общем случае тело может получать смещение и поворачиваться как жесткое целое, изменять расстояние между смежными точками, что и является самой деформацией [2, 4–9, 11, 16, 17].

По количественной оценке деформации делятся на:

- конечные;
- малые.

По качественной оценке деформации делятся на:

- линейные;
- угловые (сдвиговые).

По знаку деформации делятся на:

- растягивающие (положительные);
- сжимающие (отрицательные).

Состояние тела, при котором его частицы выведены из первоначального равновесного положения, называется **деформированным состоянием**.

Деформация – это смещение частей или материальных частиц тела, при котором изменяются взаимные расстояния между ними, но не нарушается непрерывность самого тела.

Обратимая деформация называется **упругой**. Необратимая деформация называется **пластической**.

Выберем произвольную систему координат x, y, z . Выделим в теле точку M с координатами x, y, z . Тогда при приложении нагрузки точка M переместится в положение M' . Ее координаты после деформации обозначим x', y', z' . Отрезок MM' является

вектором перемещения \bar{U} точки M . Тогда новые координаты точки M при ее перемещении в точку M' будут равны:

$$\begin{aligned}x' &= x + \bar{U}_x, \\y' &= y + \bar{U}_y, \\z' &= z + \bar{U}_z.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Если расстояние между отдельными точками тела при приложении к нему внешней нагрузки не изменяется, то тело совершает поступательное или вращательное движение при отсутствии деформации.

Если деформируемое тело при деформации не получает разрывов (то есть деформация производится в упругопластической области до σ_B), то деформации перемещения являются непрерывными деформациями координат точек, то есть:

$$U_x = U_x(x, y, z); \quad U_y = U_y(x, y, z); \quad U_z = U_z(x, y, z).\tag{4.2}$$

В этом случае непрерывными будут являться и частные производные этих функций:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_z}{\partial z}.\tag{4.3}$$

Рассмотрим понятие *однородной деформации*. Выделим две точки тела M и N (рис. 4.1). До деформации координаты точки M – (x, y, z) и координаты точки N , которая отстоит от точки M на бесконечно малом расстоянии dx, dy, dz , будут равны:

$$x + dx; \quad y + dy; \quad z + dz.\tag{4.4}$$

Тогда расстояние между точками M и N можно определить по формуле:

$$MN = S = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.\tag{4.5}$$

После деформации точка N переместилась в положение N' . Ее новые координаты:

$$x_1 + dx_1 = x + dx + U_x,\tag{4.6}$$

где U_x – компонента вектора перемещения точки N в положение N' или приращение координаты точки N .

Полный вектор перемещения точки N относительно точки M – это вектор \vec{U} , а его компоненты (проекции на выбранные оси координат) \vec{U}_x , \vec{U}_y , \vec{U}_z .

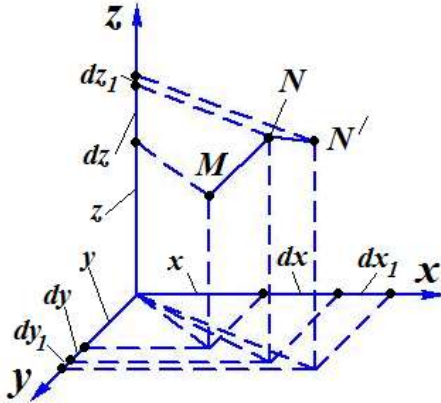


Рис. 4.1. Схема к определению однородных деформаций

Теперь можно записать, связав точки M и N , если за начало отсчета выбрана точка M :

$$\left. \begin{aligned} U_{x_1} &= U_x(x+dx, y+dy, z+dz) = f_x(x+dx, y+dy, z+dz) \\ U_{y_1} &= U_y(x+dx, y+dy, z+dz) = f_y(x+dx, y+dy, z+dz) \\ U_{z_1} &= U_z(x+dx, y+dy, z+dz) = f_z(x+dx, y+dy, z+dz) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Разложив соотношение (4.7) в ряд Тейлора, как функцию трех переменных, и пренебрегая величинами высшего порядка малости, получим:

$$\left. \begin{aligned} U_{x_1} &= U_x + \frac{\partial U_x}{\partial x} dx + \frac{\partial U_x}{\partial y} dy + \frac{\partial U_x}{\partial z} dz \\ U_{y_1} &= U_y + \frac{\partial U_y}{\partial x} dx + \frac{\partial U_y}{\partial y} dy + \frac{\partial U_y}{\partial z} dz \\ U_{z_1} &= U_z + \frac{\partial U_z}{\partial x} dx + \frac{\partial U_z}{\partial y} dy + \frac{\partial U_z}{\partial z} dz \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Из полученной системы определим приращение перемещений точки N относительно точки M . Это является абсолютным приращением перемещения. Получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{x_1} &= U_{x_1} - U_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} dx + \frac{\partial U_x}{\partial y} dy + \frac{\partial U_x}{\partial z} dz \\ U_{y_1} &= U_{y_1} - U_y = \frac{\partial U_y}{\partial x} dx + \frac{\partial U_y}{\partial y} dy + \frac{\partial U_y}{\partial z} dz \\ U_{z_1} &= U_{z_1} - U_z = \frac{\partial U_z}{\partial x} dx + \frac{\partial U_z}{\partial y} dy + \frac{\partial U_z}{\partial z} dz \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Из вышеизложенного можно сделать вывод, что деформации называются **малыми**, если в каждой точке тела приращения координаты настолько малы, что их квадратами можно пренебречь. Если относительные смещения являются линейными функциями координат, то такие деформации являются **однородными**, так как все линии прямые и параллельные до деформации и остаются прямыми и параллельными после деформации, хотя их направление может измениться.

4.2. Компоненты конечной деформации

Рассмотрим в системе координат x, y, z точки M и N (рис. 4.2). При приложении нагрузки они переместятся в новые положения M_1 и N_1 . Их координаты до перемещения: $M - (x, y, z)$ и $N - (x+dx, y+dy, z+dz)$. А после перемещения: $M_1 - (X, Y, Z)$ и $N_1 - (X+dX, Y+dY, Z+dZ)$.

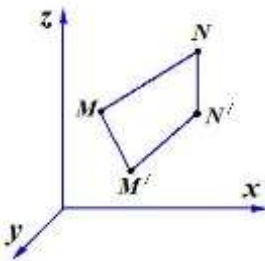


Рис. 4.2. Схема к определению конечных деформаций

Тогда квадрат длины отрезка до перемещения равен:

$$MN^2 = dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (4.10)$$

Квадрат длины отрезка после перемещения равен:

$$M_1N_1^2 = dS_1^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (4.11)$$

Координаты точки **M** после деформации (точка **M₁**) можно определить, если известен вектор перемещения \vec{U} (рис. 4.2). Таким образом, эти координаты можно определить по формуле:

$$\left. \begin{aligned} X &= x + Ux(x, y, z) \\ Y &= y + Uy(x, y, z) \\ Z &= z + Uz(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Новое положение точки **N** относительно точки **M** определится соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} X + dX &= x + Ux(x + dx; y + dy; z + dz) \\ Y + dY &= y + Uy(x + dx; y + dy; z + dz) \\ Z + dZ &= z + Uz(x + dx; y + dy; z + dz) \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Вычтем систему (4.12) из системы (4.13). Далее можно определить перемещения точки **N**:

$$\left. \begin{aligned} dX &= dx + Ux(x + dx; y + dy; z + dz) - Ux(x, y, z) \\ Y + dY &= y + Uy(x + dx; y + dy; z + dz) \\ Z + dZ &= z + Uz(x + dx; y + dy; z + dz) \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Разложим выражение (4.14) в ряды Тейлора, преобразуем их, отбросим величины высшего порядка малости, объединим общие члены, получим:

$$\left. \begin{aligned} dX &= (1 + \frac{\partial Ux}{\partial x})dx + \frac{\partial Ux}{\partial y}dy + \frac{\partial Ux}{\partial z}dz \\ dY &= \frac{\partial Uy}{\partial x}dx + (1 + \frac{\partial Uy}{\partial y})dy + \frac{\partial Uy}{\partial z}dz \\ dZ &= \frac{\partial Uz}{\partial x}dx + \frac{\partial Uz}{\partial y}dy + (1 + \frac{\partial Uz}{\partial z})dz \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Определим приращение длины линейного элемента **MN**:

$$dS_1^2 - dS^2 = (dX^2 + dY^2 + dZ^2) - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.16)$$

Из системы (4.15) подставим значения dX, dY, dZ , преобразуем их и введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} \right)^2 \right] \\ e_{yy} &= \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} \right)^2 \right] \\ e_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ e_{xy} &= \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x \partial U_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U_y \partial U_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U_z \partial U_z}{\partial x \partial y} \\ e_{yz} &= \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_x \partial U_x}{\partial z \partial y} + \frac{\partial U_y \partial U_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial U_z \partial U_z}{\partial z \partial y} \\ e_{xz} &= \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x \partial U_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial U_y \partial U_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial U_z \partial U_z}{\partial x \partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Подставив из системы (4.17) введенные обозначения в уравнение (4.16), определим приращения длины линейного элемента:

$$dS_1^2 - dS^2 = 2 \left(e_{xx} dx^2 + e_{yy} dy^2 + e_{zz} dz^2 + e_{xy} dx \cdot dy + e_{yz} dy \cdot dz + e_{zx} dz \cdot dx \right). \quad (4.18)$$

В полученном уравнении (4.18) введенные обозначения $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{xz}$ – выраженные через приращения перемещений компоненты конечной деформации.

4.3. Формулы Коши

Формулами Коши называют дифференциальные зависимости компонентов *малых деформаций от перемещений*.

При рассмотрении деформаций упругого тела можно предположить, что движение тела как жесткого целого невозможно, в силу чего при перемещении частиц тела возникают его деформации.

Возьмем элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz и рассмотрим его деформирование при перемещении точек U_x , U_y , U_z (рис. 4.3).

Спроецируем элементарный параллелепипед на плоскость XOY . Прямоугольник $ABDC$ является проекцией элементарного параллелепипеда на плоскость XOY до деформации. Четырехугольник $A_1B_1D_1C_1$ – это его проекция на плоскость XOY после деформации.

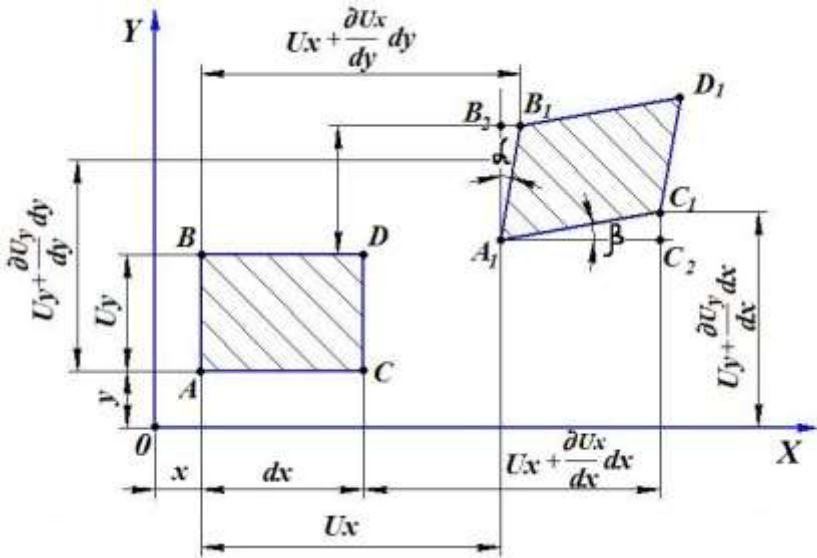


Рис. 4.3. Схема к определению малых деформаций

При этом произошло изменение формы и размеров этого параллелепипеда. Отрезки U_x и U_y – это компоненты вектора смещения точки A .

Тогда компоненты смещения точек C и B определяются из системы (4.8).

Рассмотрим деформацию этого элементарного параллелепипеда в плоскости XOY .

Определим относительное минимальное удлинение ребра AC , которое параллельно оси OX :

$$\varepsilon_x = \frac{A_1C_2 - AC}{AC}, \quad (4.19)$$

где A_1C_2 – проекция A_1C_1 на ось OX .

Величина $\frac{A_1C_2}{A_1C_1}$ является $\cos\beta$. Так как значение этого косинуса близко к 1, то угол β стремится к нулю. Примем, что $A_1C_2 = A_1C_1$. Тогда из рис. 4.3:

$$\varepsilon_x = \frac{(U_x + \frac{\partial U_x}{\partial x}dx + dx - U_x) - dx}{dx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}. \quad (4.20)$$

Определим относительное удлинение отрезка AB , параллельного оси OY :

$$\varepsilon_y = \frac{A_1B_2 - AB}{AB}. \quad (4.21)$$

Величина $\frac{A_1B_2}{A_1B_1}$ является $\cos\alpha$. Так как значение этого косинуса близко к 1, то угол α стремится к нулю. Примем, что $A_1B_2 = A_1B_1$. Тогда из рис. 4.3:

$$\varepsilon_y = \frac{(U_y + \frac{\partial U_y}{\partial y}dy + dy - U_y) - dy}{dy} = \frac{\partial U_y}{\partial y}. \quad (4.22)$$

Определим угол поворота ребра AB около точки A в плоскости XOY :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B_2 + B_1}{B_2 + A_1} \quad (4.23)$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{U_x + \frac{\partial U_x}{\partial y}dy - U_x}{U_{yx} + \frac{\partial U_y}{\partial y}dy + dy - U_y} = \frac{\frac{\partial U_x}{\partial y}dy}{\frac{\partial U_y}{\partial y}dy + dy}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\partial U_x}{\partial y}}{(1 + \frac{\partial U_y}{\partial y})}. \quad (4.24)$$

Так как для малых деформаций $\frac{\partial U_x}{\partial y} = E_y$ величина малая, по сравнению 1 (она примерно равна 0,002), то:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = \frac{\partial U_x}{\partial y}. \quad (4.25)$$

Аналогично можно определить угол поворота β ребра AC в плоскости XOY :

$$\beta = \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (4.26)$$

Тогда полное изменение прямого угла BAC в результате малой деформации будет иметь вид:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (4.27)$$

Рассмотрев относительные удлинения и сдвиги в других плоскостях, получим дифференциальные зависимости между компонентами малой деформации и компонентами перемещений (формулы Коши):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

4.4. Уравнения неразрывности деформаций

Компоненты деформаций в формулах Коши (4.28) определяются компонентами перемещений U_x , U_y , U_z . Поэтому они не могут быть произвольными, и между ними существуют определенные зависимости, которые называются **уравнениями (условиями) неразрывности (совместности) деформаций**.

Для определения уравнений связи между деформациями воспользуемся формулами Коши (4.28).

Продифференцируем угловую деформацию γ_{xy} по X и по Y :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}. \quad (4.30)$$

Как видно из полученного соотношения (4.30), две линейные деформации в одной плоскости вызывают угловую деформацию в этой же плоскости.

Аналогично, продифференцировав γ_{yz} по y и по z , а γ_{zx} по z и x , получим еще два уравнения связи. Теперь можно записать систему соотношений в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Рассмотрим влияние угловых деформаций на линейные. Для примера продифференцируем ε_x по y и z , получим выражение:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \right). \quad (4.32)$$

Далее производим дифференцирование угловых деформаций по z , y и x :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Сложим первые два члена системы (4.33) и вычтем из суммы третий ее член, получим:

$$-\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \right). \quad (4.34)$$

Сравнив выражения (4.34) и (4.32), можно записать следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Из полученных соотношений (4.35) можно отметить, что если есть угловые деформации в трех координатных плоскостях, то они вызывают линейные деформации во всех трех направлениях.

Полученные системы (4.31) и (4.35) называются *тождествами Сен-Венана*.

4.5. Тензорные характеристики деформированного состояния твердых тел

Тензор малых деформаций можно записать по аналогии с тензором напряжений в виде матрицы:

$$T\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (4.36)$$

Тензор (4.36) является симметричным, в котором компоненты, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой. Равенство угловых деформаций называется *правилом взаимности сдвигов*:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Тензор (4.36) характеризует деформацию бесконечно малой окрестности произвольной точки сплошной среды. Для достижения симметричности тензора деформаций сдвиг в одной координатной плоскости делится на две равные части независимо от вида деформации (то есть это *простой* или *чистый сдвиг*).

Свойства тензора деформаций следующие:

1) компоненты тензора деформаций зависят от выбора системы координат;

2) экстремальные значения относительных удлинений называются главными линейными деформациями и являются величинами инвариантными. В площадках их действия отсутствуют сдвиги. Такие площадки называются главными, а деформированное состояние описывается тензором главных деформаций:

$$T_{\varepsilon}^{\Gamma} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}; \quad (4.38)$$

3) главные линейные деформации являются корнями кубического уравнения вида:

$$\varepsilon^3 - I_{1(T\varepsilon)}\varepsilon^2 + I_{2(T\varepsilon)}\varepsilon - I_{3(T\varepsilon)} = 0, \quad (4.39)$$

где $I_{1(T\varepsilon)}$, $I_{2(T\varepsilon)}$, $I_{3(T\varepsilon)}$ – инварианты тензора деформаций:

$$I_{1(T\varepsilon)} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad (4.40)$$

$$I_{2(T\varepsilon)} = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - 0,25\gamma_{xy}^2 - 0,25\gamma_{yz}^2 - 0,25\gamma_{zx}^2, \quad (4.41)$$

$$I_{3(T\varepsilon)} = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + 0,25\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - 0,25\gamma_{yz}^2\varepsilon_x - 0,25\gamma_{zx}^2\varepsilon_y - 0,25\gamma_{xy}^2\varepsilon_z; \quad (4.42)$$

4) тензор деформаций T_{ε} можно разложить на $T_{\varepsilon}^{\text{ш}}$ и D_{ε} :

$$T_{\varepsilon} = D_{\varepsilon} + T_{\varepsilon}^{\text{ш}}, \quad (4.43)$$

где $T_{\varepsilon}^{\text{ш}}$ – шаровой тензор; D_{ε} – девиатор деформаций;

$$T_{\varepsilon}^{\text{ш}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\text{ср}} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\text{ср}} \end{vmatrix}, \quad (4.44)$$

где $\varepsilon_{\text{ср}}$ – средняя деформация;

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \Delta, \quad (4.45)$$

где Δ – объемное расширение для тела, находящегося в упругом состоянии.

Если тело, находящееся в пластическом состоянии $\varepsilon_{\text{ср}} = \Delta = 0$, тогда $D_\varepsilon = T_\varepsilon$;

5) наибольшие сдвиги – это главные сдвиги. Они возникают в площадках, перпендикулярных одной из главных координатных плоскостей и составляющих угол 45° с двумя другими. Значения главных сдвигов определяются формулами:

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad (4.46)$$

$$\gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad (4.47)$$

$$\gamma_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1. \quad (4.48)$$

Сумма главных сдвигов:

$$\gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{31} = 0. \quad (4.49)$$

4.6. Октаэдрические деформации и интенсивность деформаций

В площадках, равнонаклоненных к главным осям (их еще называют октаэдрическими или девиаторными площадками), возникают октаэдрические деформации.

Углы наклона этих площадок находятся из уравнений (3.52) и (3.53).

Таких площадок четыре, с четырьмя им параллельными они образуют геометрическую фигуру – октаэдр (рис. 3.7).

Определим деформации, действующие на октаэдрических площадках.

Линейная октаэдрическая деформация равна средней деформации.

Для упругого состояния:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \Delta, \quad (4.50)$$

где Δ – объемное расширение для тела, находящегося в упругом состоянии.

Для пластического состояния:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{cp} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = 0, \quad (4.51)$$

Так как $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ из условия постоянства объема.

Октаэдрическая деформация сдвига или октаэдрический сдвиг можно определить из такого выражения:

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (4.52)$$

Определим девиатор деформаций:

$$D_\varepsilon = T_\varepsilon - T_\varepsilon^{\text{ш}}. \quad (4.53)$$

Подставив в выражение (4.53) значение шарового тензора из уравнения (4.44), получим:

$$D_\varepsilon = \begin{vmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & (\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & (\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}) \end{vmatrix} \quad (4.54)$$

Запишем инварианты девиатора деформаций для упругих и пластических состояний.

Первый инвариант:

$$I_{1(D\varepsilon)} = (\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}) + (\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}) + (\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}) = 0. \quad (4.55)$$

Второй инвариант:

$$I_{2(D\varepsilon)} = -\frac{1}{6} [(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (4.56)$$

Третий инвариант:

$$I_{3(D\varepsilon)} = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} (\gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2). \quad (4.57)$$

Интенсивностью деформаций называется величина, пропорциональная квадратному корню из второго инварианта девиатора деформаций.

тора деформаций. Интенсивность линейных деформаций (приведенная деформация) определяется из уравнения:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{4}{3} |I_{2(D\varepsilon)}|} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{|I_{2(D\varepsilon)}|}. \quad (4.58)$$

Интенсивность угловых деформаций (деформация сдвига) равна:

$$\Gamma = 2 \sqrt{|I_{2(D\varepsilon)}|}. \quad (4.59)$$

Подставим в уравнение (4.58) значение второго инварианта девиатора деформаций из уравнения (4.56), получим выражение для определения:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (4.60)$$

Определим величину ε_i через главные линейные деформации:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (4.61)$$

Для пластической деформации с учетом условия постоянства объема (несжимаемости) можно записать:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y. \quad (4.62)$$

Тогда уравнение, определяющее интенсивность деформации сдвига, примет вид:

$$\Gamma = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (4.63)$$

Запишем частные случаи уравнения (4.63). Для плоского деформированного состояния будем иметь:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y; \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (4.64)$$

Тогда после подстановки в уравнение (4.63) значений из уравнения (4.64) получим часто используемое при решении задач выражение, определяющее интенсивность деформации сдвига:

$$\Gamma = \sqrt{4\varepsilon_x^2} = \gamma_{xy}^2. \quad (4.65)$$

Для чистого сдвига:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0; \quad \gamma_{xy} = \gamma; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \quad (4.66)$$

После подстановки в уравнение (4.63) значений из уравнения (4.66) получим:

$$\varepsilon_i = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}. \quad (4.67)$$

Сравнив выражения (4.65) и (4.67), можно сделать вывод о том, что интенсивность угловых деформаций сдвига совпадает с величиной наибольшей угловой деформации при чистом сдвиге:

$$\Gamma = \gamma. \quad (4.68)$$

Необходимо отметить, что интенсивность линейных деформаций (ε_i) и интенсивность деформации сдвига (Γ) являются скалярными величинами.

4.7. Условие несжимаемости (условие постоянства объема)

Условие несжимаемости (условие постоянства объема) состоит в том, что объем тела до пластической деформации равен его объему после пластической деформации.

Определим условие изменения объема для тела, которое имеет бесконечно малые размеры dx , dy , dz . Его объем до деформации определяем по формуле:

$$dV = dx dy dz. \quad (4.69)$$

После деформации произошло изменение величины линейных элементов, тогда объем тела можно определить по формуле:

$$dV' = dx' dy' dz'. \quad (4.70)$$

Или в развернутом виде формула (4.70) принимает вид:

$$dV' = (1 + \varepsilon_x) dx (1 + \varepsilon_y) dy (1 + \varepsilon_z) dz. \quad (4.71)$$

Относительное изменение объема можно определить по формуле:

$$\Delta = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{dV' - dV}{dV} - 1. \quad (4.72)$$

Подставив в уравнение (4.72) значения из уравнений (4.69) и (4.71), получим:

$$\Delta = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1. \quad (4.73)$$

Раскроем скобки и преобразуем уравнение (4.73). Пренебрегая величинами высшего порядка малости, получим уравне-

ние, которое может описывать объемное расширение тела, находящегося в упругом состоянии:

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (4.74)$$

В данном случае объемное расширение для тела, находящегося в упругом состоянии (Δ), будет соизмеримо с его деформациями ε (при значениях интенсивности деформации $\varepsilon_i < 0,2\%$).

Соотношение (4.74) – это условие *изменения объема при упругой деформации*.

При пластической деформации, вызванной напряжениями $\sigma_s > \sigma_T$ изменение объема бесконечно мало по сравнению с размерами тела и его деформациями (то есть $\Delta \rightarrow 0$). Таким образом, деформируемую среду в данном случае можно считать несжимаемой. Тогда выражение (4.74) можно переписать в виде:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \quad (4.75)$$

Соотношение (4.75) – это условие *несжимаемости или условия постоянства объема*, выраженное в деформациях.

Условие несжимаемости ($V = \text{const}$) показывает, что объем тела остается постоянным в процессе пластической деформации и исключает возможность появления разрывов и нарушения сплошности.

4.8. Логарифмические деформации и смещенный объем

При анализе малых упругопластических деформаций количественной оценкой деформаций является *показатель Коши* или *относительная линейная деформация*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (4.76)$$

где Δl – приращение длины линейного элемента; l_0 – первоначальная длина линейного элемента.

К недостаткам показателя Коши можно отнести то, что он недостаточно точно отражает смысл конечных (пластических) деформаций, так как не обладает свойством аддитивности, то есть значение величины деформации, соответствующей целому объему, не равно сумме значений величин, соответствующих его отдельным частям.

При определении конечных деформаций количественной оценкой является *показатель Генки* или *логарифмическая деформация*:

$$\delta = \ln \left(\frac{L_g}{L_u} \right), \quad (4.77)$$

где L_g — длина линейного размера после деформации; L_u — длина линейного размера до деформации.

Для этого рассмотрим деформацию параллелепипеда со сторонами:

X_u, Y_u, Z_u — до деформации;

X_g, Y_g, Z_g — после деформации;

Из условия постоянства объема при пластической деформации (4.75) следует, что:

$$X_u Y_u Z_u = X_g Y_g Z_g. \quad (4.78)$$

Преобразуем данное уравнение в отношение:

$$\frac{X_g Y_g Z_g}{X_u Y_u Z_u} = 1. \quad (4.79)$$

После его логарифмирования получим:

$$\ln \frac{X_g}{X_u} + \ln \frac{Y_g}{Y_u} + \ln \frac{Z_g}{Z_u} = 0. \quad (4.80)$$

Если мы обозначим $\ln \frac{X_g}{X_u} = \delta_x$, то получим:

$$\delta_x + \delta_y + \delta_z = 0. \quad (4.81)$$

Это еще одна запись условия несжимаемости материала (4.75), в данном случае через логарифмические деформации.

Следовательно, можно сказать, что логарифмическая деформация — это интеграл бесконечно малого приращения данного размера тела или его элемента, отнесенного к его величине в каждый данный момент деформации.

Что можно записать следующим образом:

$$\delta_x = \int_{x_u}^{x_g} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{x_u}^{x_g} = \ln \frac{x_g}{x_u}. \quad (4.82)$$

Из вышесказанного можно сделать выводы, что при пластической деформации:

- алгебраическая сумма логарифмических или истинных степеней деформации по трем взаимно параллельным направлениям равна нулю (условие несжимаемости);
- одна из логарифмических степеней деформаций имеет знак, противоположный двум другим, а по абсолютной величине равна их сумме.

Определим связь между относительными линейными и логарифмическими деформациями. Относительные линейные деформации можно определить из следующих соотношений:

$$\varepsilon_x = \frac{x_g - x_u}{x_{u0}} = \frac{\Delta x}{x_u}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y_u}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z_u}. \quad (4.83)$$

Установим связь между относительными и логарифмическими деформациями:

$$\delta_x = \ln \frac{x_g}{x_u} = \ln \frac{x_u + \Delta x}{x_u} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x_u} \right) = \ln(1 + \varepsilon_x). \quad (4.84)$$

Полученное выражение разложим в степенной ряд:

$$\delta_x = \ln(1 + \varepsilon_x) = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_x^2}{2} + \frac{\varepsilon_x^3}{3} - \frac{\varepsilon_x^4}{4} + \dots. \quad (4.85)$$

Так как $\varepsilon_x < 1$, то ряд сходящийся.

Тогда в выражении (4.85) отбросим все члены, кроме первого порядка малости, получим:

$$\delta_x \approx \varepsilon_x. \quad (4.86)$$

Можно отметить, что при малых степенях деформаций (когда $\varepsilon < 0,1$) разница между относительными и логарифмическими деформациями не превышает 5 %.

Рассмотрим понятие **«смещенный объем»**. Для этого умножим все члены выражений (4.81) и (4.75) на объем деформируемого тела. Получим:

$$V\delta_x + V\delta_y + V\delta_z = 0, \quad (4.87)$$

$$V\varepsilon_x + V\varepsilon_y + V\varepsilon_z = 0. \quad (4.88)$$

Обозначим « $V\delta$ » через V_C .

Введенное обозначение V_C является смещенным объемом, тогда мы можем записать выражение (4.87) в следующем виде:

$$V_{Cx} + V_{Cy} + V_{Cz} = 0. \quad (4.89)$$

Таким образом, получена еще одна запись условия постоянства объема, которое формулируется следующим образом: *сумма смещенных объектов по трем взаимно параллельным направлениям равна нулю.*

4.9. Скорости деформаций и линии тока

В процессе деформации расстояния между точками деформируемого тела постоянно изменяются. Скорость деформации тем больше, чем быстрее изменяются данные расстояния между точками деформируемого тела. Скорости перемещения точек являются непрерывными функциями координаты времени. Определим компоненты линейных скоростей перемещения точек в декартовой системе координат уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_x &= \varphi_x(x, y, z, t) \\ \dot{u}_y &= \varphi_y(x, y, z, t) \\ \dot{u}_z &= \varphi_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

В теории малых упругопластических деформаций скорости перемещения точек определяются через приращения перемещений по времени:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} \\ \dot{u}_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} \\ \dot{u}_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

Скорости деформаций по каким-либо координатам определяются через скорости перемещения этих точек:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}; & \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} \\ \dot{\varepsilon}_y &= \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}; & \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y} \\ \dot{\varepsilon}_z &= \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}; & \dot{\gamma}_{zx} &= \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.92)$$

Учитывая уравнения (4.91), формулы (4.92) можно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}; & \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \\ \dot{\varepsilon}_y &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}; & \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} \\ \dot{\varepsilon}_z &= \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}; & \dot{\gamma}_{zx} &= \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4.93)$$

Следовательно, компоненты скорости деформации равны производным скоростей перемещений по соответствующей координате (4.92) или производным компонент деформаций по времени (4.93).

Компоненты скоростей деформаций, так же как и компоненты деформаций, можно записать в виде тензора:

$$T_{\dot{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yx} & \dot{\varepsilon}_y & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy} & \dot{\varepsilon}_z \end{vmatrix}$$

Уравнение для определения главных скоростей линейных деформаций (относительных удлинений) имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}^3 - I_{1\dot{\varepsilon}}\dot{\varepsilon}^2 + I_{2\dot{\varepsilon}}\dot{\varepsilon} - I_{3\dot{\varepsilon}} = 0,$$

где $I_{1\dot{\varepsilon}}, I_{2\dot{\varepsilon}}, I_{3\dot{\varepsilon}}$ – инварианты тензора компонент скоростей деформации аналогичны инвариантам тензора деформаций (4.40)–(4.42).

Условие постоянства объема при пластической деформации, выраженное в скоростях деформации, определяется следующим уравнением:

$$\dot{\epsilon}_X + \dot{\epsilon}_Y + \dot{\epsilon}_Z = 0$$

или

$$\frac{\partial \dot{u}_X}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_Y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_Z}{\partial z} = 0,$$

записывается в индексной форме как $\text{div} \bar{u}_{i(P)} = 0$ и называется дивергенцией векторного поля.

Движение сплошной среды в общем виде описывается **линиями тока**.

Линии тока – это кривые линии, в каждой точке которой касательные в каждый момент времени совпадают с направлением полного вектора скорости перемещения.

Если процесс стационарен, то эти кривые линии являются траекториями движения.

5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Критерий, который определяет условия, необходимые для возникновения пластичной деформации при сложном напряженном состоянии, называется *условием пластичности* [1, 2, 5–9, 11, 16, 17].

Так как напряженное состояние тела, находящегося в пластическом состоянии, описывается девиатором напряжений (3.14), то критерием перехода его из упругого состояния в пластическое должны являться характеристики девиатора напряжений. Математическое описание физического процесса перехода из упругого состояния в пластическое не должно быть связано с выбором системы координат. Следовательно, должно определяться инвариантами девиатора напряжений. Таким инвариантом является второй инвариант девиатора напряжений:

$$I_2(T_0) = (\sigma_x - \sigma_{cp})(\sigma_y - \sigma_{cp}) + (\sigma_y - \sigma_{cp})(\sigma_z - \sigma_{cp}) + (\sigma_z - \sigma_{cp})(\sigma_x - \sigma_{cp}) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2. \quad (5.1)$$

5.1. Условие пластичности Губера-Мизеса

Одним из условий является условие пластичности Губера-Мизеса, которое определяется через второй инвариант девиатора напряжений (5.1). Оно формулируется следующим образом: «любая элементарная частица металлического тела переходит из упругого состояния в пластическое в тот момент, когда интенсивность напряжений достигает величины, равной напряжению текучести при одноосном пластическом напряженном состоянии, соответствующем температурно-скоростным условиям деформирования и степени деформации».

Математическое выражение условия пластичности Губера-Мизеса записывается следующим образом через интенсивность напряжений (3.20):

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sigma_T. \quad (5.2)$$

Выразим условие пластичности Губера-Мизеса через интенсивность касательных напряжений (3.19):

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sigma_T. \quad (5.3)$$

Так как интенсивность касательных напряжений связана с интенсивностью напряжений вида:

$$T = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}, \quad (5.4)$$

то мы можем записать, что:

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T. \quad (5.5)$$

Данная величина (5.5) обозначается через ***K***, которая называется ***постоянной пластичности***:

$K \approx 0,575\sigma_T$ – по условию пластичности Губера-Мизеса.

5.2. Условие пластичности Треска-Сен-Венана-Леви

Предпосылкой этого условия является появление линий скольжения на поверхности пластически деформируемого тела, так как линии скольжения – траектории максимальных главных касательных напряжений.

Условие пластичности Треска-Сен-Венана-Леви или условие максимальных главных касательных напряжений формулируется следующим образом: «пластическая деформация появляется в тот момент, когда наибольшее изменение главных касательных напряжений достигает некоторой величины, зависящей от свойств деформируемого материала».

Математическое выражение данного условия пластичности записывается в виде:

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = \pm 0,5(\sigma_1 - \sigma_3) = \tau_s, \quad (5.6)$$

где τ_s – предел текучести материала на сдвиг.

Предел текучести материала на сдвиг можно определить через предел текучести материала:

$$\tau_s = 0,5\sigma_T. \quad (5.7)$$

Данная величина (5.7) также обозначается через K и называется *постоянной пластичности*:

$K = 0,5\sigma_T$ – по условию Треска-Сен-Венана-Леви.

5.3. Энергетическое условие пластичности

Энергетическое условие пластичности формулируется следующим образом: «переход деформируемого тела в пластическое состояние происходит независимо от характера напряженного состояния в тот момент, когда потенциальная энергия формоизменения, отнесенная к единице объема, достигнет некоторой величины, зависящей только от механических свойств деформируемого тела».

Перепишем условие пластичности Губера-Мизеса (5.2) через главные напряжения:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T. \quad (5.8)$$

Выражение (5.8) возведем в квадрат и получим:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (5.9)$$

Определим полную потенциальную энергию упругой деформации:

$$A_{\Pi} = A_o + A_{\Phi}, \quad (5.10)$$

где A_o – потенциальная энергия изменения объема; A_{Φ} – потенциальная энергия изменения формы.

Как известно из теории упругости, удельная потенциальная энергия деформации, то есть энергия, отнесенная к единице объема, равна половине скалярного произведения тензора напряжений на тензор деформаций.

Перемножим тензор напряжений в главных осях (3.12) и тензор деформаций в главных осях (4.38), получим следующее выражение:

$$A_{\Pi} = 0,5(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \quad (5.11)$$

Согласно обобщенному закону Гука, связь между деформациями и напряжениями имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Из полученной системы (5.12) подставим значения главных деформаций в формулу (5.11), получим:

$$A_{\Pi} = \frac{1}{2E} \{ \sigma_1 [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2 [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] + \sigma_3 [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \}. \quad (5.13)$$

Преобразовав формулу (5.13), получим выражение для определения полной потенциальной энергии упругой деформации:

$$A_{\Pi} = \frac{1}{2E} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (5.14)$$

Для определения упругой деформации изменения объема перемножим шаровые тензоры напряжений (формула (3.13)) и деформаций (формула (4.44)). Получим:

$$A_o = \frac{1}{2} (\sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{\text{ср}} + \sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{\text{ср}} + \sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{\text{ср}}) = \frac{3}{2} \sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{\text{ср}}. \quad (5.15)$$

Вместо среднего напряжения и средней деформации в формулу (5.15) подставим их значения из формул (3.18) и (4.45). Сложив правые и левые части системы (5.12), получим:

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3E} \{ [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] + [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \}. \quad (5.16)$$

Преобразовав выражение (5.16), получим:

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\nu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (5.17)$$

Из формулы (5.17) полученное значение средней деформации, подставив в выражение (5.15), приведем к виду:

$$A_o = \frac{1}{6E} [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2\nu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2]. \quad (5.18)$$

Из формулы (5.10) выразим потенциальную энергию изменения формы:

$$A_{\Phi} = A_{\Pi} - A_o. \quad (5.19)$$

Подставим в нее полученные значения из формул (5.14) и (5.18), тогда выражение (5.19) после преобразований примет вид:

$$A_{\Phi} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (5.20)$$

Сравнив полученную формулу (5.20) с выражением (5.9), можем переписать ее в следующем виде:

$$A_{\Phi} = \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_T^2 = \text{const}. \quad (5.21)$$

На основании полученной формулы (5.21) энергетическое условие пластичности можно сформулировать следующим образом: «количество удельной потенциальной энергии упругой деформации формы элемента металлического тела при его пластической деформации является для данных условий деформирования (степени, скорости, температуры) величиной постоянной, независимой от схемы напряженного состояния».

5.4. Теории прочности

Основные понятия о предельном состоянии. Теории прочности используются для оценки прочности конструкций в случае плоского и объемного напряженного состояния. Напряженное состояние тела в общем случае описывается тензором напряжений (3.11), в котором шесть независимых величин [3, 17].

Под предельным опасным состоянием понимается такое состояние, при котором происходит качественное изменение свойств материала, то есть переход от одного механического состояния к другому. Для пластичных материалов предельным считается напряженное состояние, соответствующее возникновению заметных остаточных деформаций, а для хрупкого материала – такое состояние, при котором начинается разрушение. Так как предельное состояние материала является недопустимым, то при расчетах на прочность используют понятие «допускаемое состояние», оно соответствует нагрузке, получаемой путем деления нагрузки, вызывающей предельное состояние на коэффициент запаса прочности. Если в двух напряженных состояниях коэффициенты запаса прочности равны, то такие состояния *называются равноопасными*.

Для сравнения различных напряженных состояний за эталон (эквивалент) принимают простое растяжение (сжатие) с главным напряжением, которое называется эквивалентным напряжением ($\sigma_{\text{экв}}$). *Эквивалентное напряжение* – это такое напряжение, которое следует создать в растянутом образце для того, чтобы его напряженное состояние было равноопасным заданному напряженному состоянию.

Если вместо шести компонентов напряжений рассматривать эквивалентные им три главных напряжения и найти такую их комбинацию, которая была бы равноопасной линейному напряженному состоянию, то три главных нормальных напряжения можно заменить эквивалентным им напряжением и уже его сравнивать равноопасным (рис. 5.1).

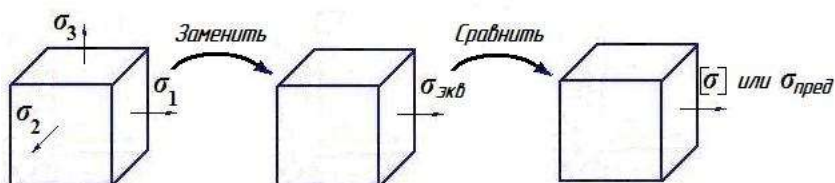


Рис. 5.1. Схема приведения напряженного состояния к эквивалентному

Расчеты на прочность отдельных стержней, балок и конструкций основаны на оценке прочности материала в опасной точке. При таких расчетах наибольшие нормальные, касательные или эквивалентные напряжения (в зависимости от вида напряженного состояния и принятой теории прочности) в опасном сечении и в опасной точке сравниваются с допускаемым напряжением. Если наибольшие расчетные напряжения не превышают допускаемые напряжения, то считается, что надлежащий запас прочности конструкции этим обеспечивается. Такой способ расчета на прочность называют *расчетом по допускаемым напряжениям*.

При расчете по допускаемым напряжениям опасным, или предельным, состоянием конструкции считается такое ее состояние, при котором наибольшее напряжение хотя бы в одной точке материала конструкции достигает опасной величины – предела текучести (для пластичного материала) или временного сопротивления (для хрупкого материала). Состояние всей остальной массы материала во внимание не принимается.

Между тем, при неравномерном распределении напряжений (например, при изгибе, кручении) в статически неопределимых конструкциях, изготовленных из пластичных материалов, появление местных напряжений, равных пределу текучести, в большинстве случаев не является опасным для всей конструкции. Практика показывает, что при появлении местных пластических деформаций конструкция еще может удовлетворять предъявляемым к ней требованиям, и для перехода ее в предельное состояние требуется дальнейшее возрастание нагрузки. Таким образом, в действительности конструкция обладает запасом прочности большим, чем при расчете по допускаемым напряжениям.

В связи с этим недостатком метода расчета на прочность по допускаемым напряжениям возникла необходимость в новом подходе к оценке прочности конструкций. Был предложен *метод расчета конструкций по предельному состоянию*.

Предельное состояние конструкции – такое ее состояние, при котором она теряет способность сопротивляться внешним воздействиям или перестает удовлетворять предъявляемым эксплуатационным требованиям.

Под предельным опасным напряженным состоянием понимается такое, при котором происходит качественное изменение свойств материала – переход от одного механического состояния к другому.

Для сравнения различных напряженных состояний за эталон (эквивалент) принято простое растяжение (сжатие) с главным напряжением $\sigma_{\text{экр}}$.

Как было отмечено ранее, эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$ — это такое напряжение, которое следует создать в растянутом образце для того, чтобы его напряженное состояние было равно-опасно заданному напряженному состоянию. Тогда условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_{\text{экв}} < [\sigma]. \quad (5.22)$$

Основные теории прочности. Теории прочности представляют собой гипотезы о критериях, определяющих условия перехода материала в предельное состояние.

В первой теории прочности за критерий перехода материала в предельное состояние принимается *наибольшее нормальное напряжение*. Согласно этой теории, опасное состояние наступает тогда, когда какое-либо из главных напряжений достигает опасного значения. В соответствии с этим при расчетах на прочность ограничивается величина наибольших главных напряжений, которая не должна превышать допускаемого нормального напряжения $[\sigma]$.

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^I \leq [\sigma], \quad (5.23)$$

где $\sigma_{\text{экв}}^I = |\sigma_1|$, если $|\sigma_1| \geq [\sigma_3]$; $\sigma_{\text{экв}}^I = |\sigma_3|$, если $|\sigma_3| \geq [\sigma_1]$.

Во второй теории прочности за критерий принимается *наибольшая деформация*. Согласно этой теории, опасное состояние материала наступает тогда, когда линейные деформации достигают некоторого опасного значения.

Для пластичного материала условие прочности имеет вид:

$$|\varepsilon_{\text{max}}| \leq [\varepsilon], \quad (5.24)$$

где $[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$.

Если, например:

$$|\varepsilon_{\text{max}}| = \varepsilon_1 = \left(\frac{1}{E}\right)(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)), \quad (5.25)$$

то по второй теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (5.26)$$

Для хрупкого материала условие прочности имеет вид:

$$\varepsilon_{\text{max}} \leq [\varepsilon_p] = \frac{[\sigma_p]}{E}, \quad (5.27)$$

$$\varepsilon_{\text{min}} \leq [\varepsilon_c] = \frac{[\sigma_c]}{E}. \quad (5.28)$$

Первая теория дает удовлетворительное совпадение с опытными данными только для *хрупких материалов*. Вторая практически в настоящее время не применяется.

В третьей теории прочности за критерий принимается *наибольшее касательное напряжение*. Согласно этой теории, опасное состояние наступает, если наибольшие касательные напряжения достигают опасного значения.

Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau], \quad (5.29)$$

где $[\tau] = \frac{\sigma}{2}$.

Откуда

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (5.30)$$

Четвертая теория прочности – энергетическая, представляет собой гипотезу о том, что причиной возникновения опасного состояния является величина удельной потенциальной энергии изменения формы u_ϕ , то есть критерий – удельная потенциальная энергия изменения формы.

Формулу удельной потенциальной энергии изменения формы получим из формулы полной удельной потенциальной энергии деформации (3.5), подставляя значение коэффициента Пуассона, равного $\nu = 0,5$.

Получим

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3. \quad (5.31)$$

Условие прочности имеет вид:

$$u_\phi \leq [u_\phi], \quad (5.32)$$

где $[u_\phi] = \frac{1+\nu}{3E} [\sigma]$.

Откуда

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma]. \quad (5.33)$$

Третья и четвертая теории прочности дают удовлетворительное совпадение результатов теоретического расчета с опытными данными для пластичных материалов и широко применяются при расчетах на прочность. Для хрупких материалов эти теории не применимы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Прикладная теория пластичности: учеб. пособие / К.М. Иванов [и др.]. – СПб. : Политехника, 2011. – 378 с.
2. Черняк В.Г. Механика сплошных сред: учеб. пособие / В.Г. Черняк, П.Е. Суетин. – М. : Физматлит, 2006. – 352 с.
3. Домбровский Ю.М. Прочность металлов. Физические и инженерные аспекты / Ю.М. Домбровский ; Донской гос. техн. ун-т. – Ростов-на-Дону, 2001. – 79 с.
4. Горшков А.Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М. : Физматлит, 2002. – 416 с.
5. Теория обработки металлов давлением / В.А. Голенков [и др.] ; под ред. В.А. Голенкова, С.П. Яковлева. – М. : Машиностроение, 2009. – 441 с.
6. Сторожев М.В. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – М. : Машиностроение, 1977. – 423 с.
7. Гунн Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением / Гунн Г.Я. – М. : Металлургия, 1980. – 456 с.
8. Евстратов В.А. Теория обработки металлов давлением / В.А. Евстратов. – Харьков : Вища школа, 1981. – 247 с.
9. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением / В.Л. Колмогоров. – М. : Металлургия, 1982. – 612 с.
10. Полухин П.И. Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов: справочник / П.И. Полухин, Г.Я. Гун, А.М. Галкин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Металлургия, 1983. – 352 с.
11. Тюрин В.А. Теория обработки металлов давлением / В.А. Тюрин, А.И. Мохов ; под ред. В.А. Тюрин. – Волгоград : Политехник, 2000.
12. Гун Г.Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением : учеб. пособие / Г.Я. Гун. – М. : Металлургия, 1983.

13. Полухин П.И. Физические основы пластической деформации : учеб. пособие / П.И. Полухин, С.С. Горелик, В.К. Воронцов. – М. : Металлургия, 1982.

14. Кучеряев Б.В. Механика сплошных сред / Б.В. Кучеряев. – М. : Издательство МИСиС, 2000.

15. Экспериментальные методы механики деформируемых твердых тел (технологические задачи обработки давлением) / В.К. Воронцов [и др.]. – М. : Металлургия, 1990.

16. Резников Ю.Н. Инженерная механика твердого тела : учеб. пособие / Ю.Н. Резников, Е.А. Ефремова, А.В. Вовченко ; Донской гос. техн. ун-т. – Ростов-на-Дону, 1998, – 167 с.

17. Ефремова Е.А. Практикум по дисциплинам «Математическое моделирование предельных состояний твердого тела», «Механика сплошных сред» : метод. указания / Е.А. Ефремова, А.С. Пасхалов, А.В. Гунин. – Ростов-на-Дону, 2015.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	5
1.1. Понятия материальной точки, абсолютно твердого тела, сплошной среды.....	5
1.2. Гипотезы сплошности, однородности и изотропии деформируемого материала.....	6
1.3. Понятие силы, внешние и внутренние силы, напряжение.....	6
1.4. Деформации, виды деформаций.....	9
2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ КРИВЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	12
2.1. Диаграмма растяжения материала.....	12
2.2. Характеристики диаграммы напряжений.....	13
2.3. Идеализация механических свойств деформируемой среды.....	17
2.4. Уравнения и реологические модели сложных сред...	21
2.5. Аппроксимация экспериментальных кривых.....	25
2.6. Эффект Боушингера и петля упругого гистерезиса...	30
3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ...	33
3.1. Компоненты напряжений на гранях элементарного параллелепипеда.....	33
3.2. Закон парности касательных напряжений.....	34
3.3. Главные площадки и главные напряжения.....	35
3.4. Тензорные характеристики напряженного состояния	36
3.5. Напряжения в наклонной площадке.....	39
3.6. Эллипсоид напряжений.....	42
3.7. Главные касательные напряжения.....	43
3.8. Октаэдрические напряжения.....	48
3.9. Дифференциальные уравнения движения и равновесия.....	50

4.	КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ.....	53
4.1.	Понятия о перемещениях и однородных деформациях.....	53
4.2.	Компоненты конечной деформации.....	56
4.3.	Формулы Коши.....	58
4.4.	Уравнения неразрывности деформаций.....	61
4.5.	Тензорные характеристики деформированного состояния твердых тел.....	63
4.6.	Октаэдрические деформации и интенсивность деформаций.....	65
4.7.	Условие несжимаемости (условие постоянства объема).....	68
4.8.	Логарифмические деформации и смещенный объем...	69
4.9.	Скорости деформаций и линии тока.....	72
5.	ПРЕДЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ.....	75
5.1.	Условие пластичности Губера-Мизеса.....	75
5.2.	Условие пластичности Теска-Сен-Венана-Леви....	76
5.3.	Энергетическое условие пластичности.....	77
5.4.	Теории прочности.....	79
	Библиографический список.....	84

Учебное издание

Ефремова Елена Александровна
Пасхалов Александр Сергеевич
Гунин Александр Викторович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Редактор Е.Ю. Прорешная
Компьютерная обработка: С.Ю. Матузова

В печать

Формат 60×84/16. Объем 5,5 усл. п. л.

Тираж ... экз. Заказ № Цена свободная

Издательский центр ДГТУ

Адрес университета и полиграфического предприятия:
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1